NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.2

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 22/06/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ ky - z = 0 \\ -x + kx + z = -1 \end{cases}$$

Esistono valori di k tali che il sistema abbia infinite soluzioni? In caso affermativo determinare tali soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ $T = \langle (2,-1,0,0), (3,0,-1,0) \rangle$, $S = \{(x,y,z,t) : x + 3z + 4t = 0,\ y = 0\}$ e $W = S + T$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x,y,z,t) = (x + y, y - z + t, x + z - t).$$

(1) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W;
(2) Determinare una base $\mathcal{C}$ di $f(W)$;
(3) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$;
(4) Detta $g = f|_W : W \longrightarrow f(W)$ la restrizione di f a W, determinare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)$ dove $\mathcal{B}$ e $mathcalC$ sono le basi calcolate nei punti (1) e (2).

Esercizio 3 (10 punti) Sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(1) Stabilire se f_A è invertibile.
(2) Calcolare autovalori ed autovettori di f_A.
(3) Stabilire se f_A è diagonalizzabile.
(4) Stabilire se la matrice A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$