NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/07/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema e, quando è possibile determinarne le soluzioni

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 7y + (k^2 + 4)z = k - 1 \end{cases}$$

Esercizio 2 (10 punti) Siano $U = \langle (1,1,0,0), (1,-2,0,0), (2,1,0,0) \rangle$ e $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, z - t = 0, y - t = 0\}$.

(1) Calcolare la dimensione di U e V e fornire una base di ciascuno di essi.
(2) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.
(3) Stabilire se esiste una matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ avente U e V come autospazi (relativi a due autovalori diversi).
(4) Costruire, se possibile, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = U$, $Im(f) = V$.

Esercizio 3 (10 punti) Si considerino la base $\mathcal{B} = ((0,1,1),(1,1,0),(0,0,1))$ e la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ determinato da

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica.

(3) Verificare che l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

(4) Determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ sia diagonale.