NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 14/09/2015

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 5kx + 5y - 3z = 3 \\ kx + y - 3z = 0 \\ x + ky - z = k \\ 2kx + 2y + 6z = 3 \end{cases}$$

e, quando è possibile, determinarne le soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $W_k = \langle (1, 2, k), (1, k, 1), (2, 4, 3) \rangle$.

(1) Al variare del parametro reale k determinare una base $\mathcal{B}_k$ di W_k.
(2) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (1, 2, 2)$ appartiene a W_k;
(3) Determinare per quali valori del parametro k esiste un endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ tale che $Im(F_k) = W_k$ e $\ker(F_k) = \langle v \rangle$. Per questi valori di k descrivere un tale endomorfismo F_k esplicitamente.

Esercizio 3 (10 punti) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente come autospazi $\langle(1,1,1),(1,1,0)\rangle$ e $\langle(1,0,0)\rangle$ rispettivamente rispetto agli autovalori 2 e 3.

(1) Determinare l'endomorfismo F esplicitamente ($F(x,y,z) = \dots$).
(2) Stabilire se l'endomorfismo F è diagonalizzabile.
(3) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

In caso affermativo determinare tale base.