NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 12/01/2016

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ kx + 2k^2 z = 2k - 1. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2 (10 punti) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0, \quad x - y = 0\}, \; U_2 = \big\langle(-1, 1, 1)\big\rangle.$$

(1) Determinare una base dei sottospazi $U_1 + U_2$ e $U_1 \cap U_2$, e stabilire se la somma di U_1 ed U_2 è diretta.

(2) Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U_1 come nucleo ed U_2 come immagine? In caso affermativo costruire L.

(3) Esiste una applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U_2 come immagine? In caso affermativo costruire T.

(4) Esiste una applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che abbia U_1 come nucleo? In caso affermativo costruire f.

Esercizio 3 (10 punti) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da: $F(x, y, z) = (x+2y+z, 2x+2z, x+2y+z)$.

(1) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di F.
(2) Stabilire se il vettore $(1, -1, 0)$ è autovettore di F.
(3) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di F.
(4) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta F è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$