NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 09/02/2016

Esercizio 1 (10 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 1 - k \\ kx + (4 - k)y + kz = 1 \end{cases}$$

è equivalente al sistema lineare:

$$\Omega : \begin{cases} 2x + 8y + 2z = 1 \\ x + 7y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2 (11 punti) Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \mid 4x + 3y - 2z = 0\}.$$

(1) Determinare una base di U.
(2) Determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.
(3) Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $U + T = \mathbb{R}^3$.
(4) Costruire, se possibile, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U come autospazio relativo all'autovalore 1 e V come autospazio relativo all'autovalore 2.
(5) Costruire, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia U come autospazio relativo all'autovalore 1 e T come autospazio relativo all'autovalore 2.
(6) Costruire, se possibile, una funzione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia V come nucleo e T come immagine.

Esercizio 3 (9 punti) Si consideri l'endomorfismo g_h di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a g_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia la matrice

$$B_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h+1 & 0 & -2h \\ 0 & -2h & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si determinino tutti i valori del parametro reale $h \in \mathbb{R}$ tali che la matrice B_h sia diagonalizzabile.
(2) Stabilire se esistono valori di h tali che la matrice B_h sia simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(3) Posto $h = 1$, verificare che 4 è autovalore della matrice $(B_1)^2$ e calcolarne il relativo autospazio.