NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

II APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 01/07/2016

Esercizio 1 (8 punti) Determinare, se possibile, un sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 avente come insieme di soluzioni l'insieme

$$S = (1,1,0,1) + \langle (1,3,2,0), (0,1,2,0) \rangle.$$

Determinare poi, se possibile, un sistema lineare di 4 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, avente S come insieme di soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare così definita:

$$p(x) \mapsto (p(0), p(1)),$$

e sia $S = \langle 1-x, 1-x^2 \rangle$.

(1) Determinare una base di $\ker f$ ed una base di Imf;
(2) stabilire se la somma di $\ker f$ e S è diretta;
(3) determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $f_{|T} : T \to \mathbb{R}^2$ sia un isomorfismo;
(4) determinare, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}$;
(5) determinare, se possibile, una funzione lineare $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^2}$.

Esercizio 3 (12 punti) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalle seguenti condizioni: $f(1,1,0,1) = (1,1,0,1)$, $f(2,0,0,0) = (2,0,0,0)$, $f(0,0,1,0) = -(0,0,1,0)$, $f(0,0,1,1) = -(0,0,1,1)$.

a) Determinare la matrice associata ad f rispetto ad una base B fissata sia nel dominio che nel codominio;
b) determinare autovalori e autospazi di f;
c) stabilire se f è diagonalizzabile e determinare, in tal caso, una sua forma diagonale;
d) stabilire se f è invertibile;
e) determinare, se possibile, una base C di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

f) determinare $f \circ f$ in forma esplicita;
g) determinare f^n per ogni $n \in \mathbb{N}$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.2

II APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 01/07/2016

Esercizio 1 (8 punti) Determinare, se possibile, un sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 avente come insieme di soluzioni l'insieme

$$S = (0, 1, -1, 3) + \langle (0, 1, 2, 3), (1, 2, 1, 0) \rangle.$$

Determinare poi, se possibile, un sistema lineare di 4 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4, avente S come insieme di soluzioni.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare così definita:

$$p(x) \mapsto (p(0), p(-1)),$$

e sia $S = \langle 1 + x, 1 - x^2 \rangle$.

(1) Determinare una base di $\ker f$ ed una base di Imf;
(2) stabilire se la somma di $\ker f$ e S è diretta;
(3) determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $f_{|T} : T \to \mathbb{R}^2$ sia un isomorfismo;
(4) determinare, se possibile, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $g \circ f = id_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}$;
(5) determinare, se possibile, una funzione lineare $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^2}$.

Esercizio 3 (12 punti) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalle seguenti condizioni: $f(1, 2, 0, 2) = -(1, 2, 0, 2)$, $f(1, 0, 0, 0) = -(1, 0, 0, 0)$, $f(0, 0, 2, 0) = (0, 0, 2, 0)$, $f(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1)$.

a) Determinare la matrice associata ad f rispetto ad una base B fissata sia nel dominio che nel codominio;
b) determinare autovalori e autospazi di f;
c) stabilire se f è diagonalizzabile e determinare, in tal caso, una sua forma diagonale;
d) stabilire se f è invertibile;
e) determinare, se possibile, una base C di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

f) determinare $f \circ f$ in forma esplicita;
g) determinare f^n per ogni $n \in \mathbb{N}$