NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

IV APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 12/09/2016

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = k^2 \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2 (10 punti) Si considerino i vettori $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 2)$ di $\mathbb{R}^3$ e i vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$ e $v_4 = (2, 0, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Mostrare che esiste un'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T(u_1) = v_2 - v_4$, $T(u_2) = v_1 + v_3$ e $T(u_3) = v_1 - v_3$.

b) Stabilire se la funzione T definita al punto $a)$ è suriettiva. Determinare una base di $\ker T$ ed una base di ImT.

c) Posto $W = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 + y_2 - 2y_4 = 0, y_3 = 0\}$, determinare una base di $W \cap ImT$.

d) Tra tutte le funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tali che $f(u_2) = v_1 + v_3$ e $f(u_3) = v_1 - v_3$, costruirne una la dimensione del cui nucleo sia la massima possibile.

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la seguente matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità della matrice.

b) Posto $\alpha = -1$ determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_α.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.2

IV APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 12/09/2016

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = k^2 \\ x + ky + z = k \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 2 (12 punti) Si considerino i vettori $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 2, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ e i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 2, 0)$ e $v_4 = (2, 1, 0, 2)$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Mostrare che esiste una sola funzione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T(u_1) = v_2 - v_4$, $T(u_2) = v_1 + v_3$ e $T(u_3) = v_1 - v_3$.

b) Stabilire se la funzione T definita al punto a) è suriettiva. Determinare una base di $\ker T$ ed una base di ImT.

c) Posto $W = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 + y_3 - 2y_4 = 0, y_2 = 0\}$, determinare una base di $W \cap ImT$.

d) Tra tutte le funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tali che $f(u_2) = v_1 + v_3$ e $f(u_3) = v_1 - v_3$, costruirne una la dimensione del cui nucleo sia la massima possibile.

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la seguente matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità della matrice.

b) Posto $\alpha = 1$ determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_α.