NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.1

I APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 06/06/2016

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} z - y = 2 \\ x + 3y - z = 1 \\ 2z - kx = 4 - 3k \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni.
b) Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

Esercizio 2 (15 punti) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (-1, 0, 2k), \qquad v_2 = (1, k, k), \qquad v_3 = (0, k, 1)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$, e sia $T_k = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(1) Si determini una base di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(2) si determini una base del sottospazio intersezione di tutti i sottospazi T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(3) si dica se esistono due valori k_1 e k_2 di k tali che la somma dei sottospazi T_{k_1} e T_{k_2} sia diretta;
(4) si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(1, 0, 0) = v_1; \quad F(0, 1, 0) = v_2; \quad F(0, 0, 1) = v_3;$$

Si stabilisca per quali valori di k il vettore $(2, k, -k)$ appartiene all'immagine di F e si dica per quali k la funzione F è iniettiva;
(5) si determini, quando possibile, una applicazione lineare iniettiva $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Img = T_k$.

Esercizio 3 (9 punti) Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A;
b) si stabilisca se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determinino due diverse matrici H_1 e H_2 tali che $H_1^{-1}AH_1$ e $H_2^{-1}AH_2$ siano diagonali;
c) si dica se la matrice A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.2

I APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 06/06/2016

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y + z = 1 \\ 2x - kz = 4 - 3k \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni.
b) Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

Esercizio 2 (15 punti) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (-1, 2k, 0), \quad v_2 = (1, k, k), \quad v_3 = (0, 1, k)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$, e sia $T_k = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(1) Si determini una base di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(2) si determini una base del sottospazio intersezione di tutti i sottospazi T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(3) si dica se esistono due valori k_1 e k_2 di k tali che la somma dei sottospazi T_{k_1} e T_{k_2} sia diretta;
(4) si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(1,0,0) = v_1; \quad F(0,1,0) = v_2; \quad F(0,0,1) = v_3;$$

Si stabilisca per quali valori di k il vettore $(2, -k, k)$ appartiene all'immagine di F e si dica per quali k la funzione F è iniettiva;
(5) si determini, quando possibile, una applicazione lineare iniettiva $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Img = T_k$.

Esercizio 3 (9 punti) Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A;
b) si stabilisca se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determinino due diverse matrici H_1 e H_2 tali che $H_1^{-1}AH_1$ e $H_2^{-1}AH_2$ siano diagonali;
c) si dica se la matrice A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.3

I APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 06/06/2016

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} z - y = -2 \\ x + 3z - y = 1 \\ 2y - kx = 4 - 3k \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni.
b) Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

Esercizio 2 (15 punti) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (-1, 0, -2k), \quad v_2 = (1, -k, -k), \quad v_3 = (0, -k, 1)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$, e sia $T_k = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(1) Si determini una base di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(2) si determini una base del sottospazio intersezione di tutti i sottospazi T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(3) si dica se esistono due valori k_1 e k_2 di k tali che la somma dei sottospazi T_{k_1} e T_{k_2} sia diretta;
(4) si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(1,0,0) = v_1; \quad F(0,1,0) = v_2; \quad F(0,0,1) = v_3;$$

Si stabilisca per quali valori di k il vettore $(2, -k, k)$ appartiene all'immagine di F e si dica per quali k la funzione F è iniettiva;
(5) si determini, quando possibile, una applicazione lineare iniettiva $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Img = T_k$.

Esercizio 3 (9 punti) Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A;
b) si stabilisca se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determinino due diverse matrici H_1 e H_2 tali che $H_1^{-1}AH_1$ e $H_2^{-1}AH_2$ siano diagonali;
c) si dica se la matrice A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

TEMA N.4

I APPELLO DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 06/06/2016

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y + z = 3 \\ 2x + kz = 4 + 3k \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di k il sistema ha soluzioni.
b) Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

Esercizio 2 (15 punti) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2k, 0), \quad v_2 = (-1, k, k), \quad v_3 = (0, -1, k)$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$, e sia $T_k = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(1) Si determini una base di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(2) si determini una base del sottospazio intersezione di tutti i sottospazi T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;
(3) si dica se esistono due valori k_1 e k_2 di k tali che la somma dei sottospazi T_{k_1} e T_{k_2} sia diretta;
(4) si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$F(1, 0, 0) = v_1; \quad F(0, 1, 0) = v_2; \quad F(0, 0, 1) = v_3;$$

Si stabilisca per quali valori di k il vettore $(-2, -k, k)$ appartiene all'immagine di F e si dica per quali k la funzione F è iniettiva;
(5) si determini, quando possibile, una applicazione lineare iniettiva $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Img = T_k$.

Esercizio 3 (9 punti) Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

a) si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A;
b) si stabilisca se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determinino due diverse matrici H_1 e H_2 tali che $H_1^{-1}AH_1$ e $H_2^{-1}AH_2$ siano diagonali;
c) si dica se la matrice A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$