NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/09/2018
TEMA 2

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ generano $\mathbb{R}^2$.
(2) Dato un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 esiste un unico sottospazio T di dimensione 2 tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

(1) **Esercizio 1** Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari Σ e Σ'_k nelle incognite x, y, z sono equivalenti:

$$\Sigma : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma'_k : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ kx + ky + kz = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

Per i valori di k trovati determinare le soluzioni dei sistemi Σ e Σ'_k.

(2) **Esercizio 2** Siano $S = \langle(1,-1,0),(2,1,1)\rangle$ e $T = \langle(1,2,1)\rangle$.

(a) Determinare una base di $S+T$ ed una base di $S \cap T$.

(b) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = S$, $Im(f) = T$.

(c) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = T$, $Im(g) = S$.

(d) Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

(e) Determinare, se possibile, un vettore di T la cui proiezione ortogonale su S sia $(1,-1,0)$

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1,0,0) = (0,0,0)$, $f(0,1,1) = (0,-1,-1)$, $f(0,1,-1) = (0,-1,1)$.

(a) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.
(b) Calcolare gli autovalori di f.
(c) Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
(d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.
(e) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 13/09/2018
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Due vettori di $\mathbb{R}^2$ che generano $\mathbb{R}^2$ sono anche linearmente indipendenti.
(2) Dato un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 esiste un unico sottospazio T di dimensione 1 tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

(1) **Esercizio 1** Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari Σ e Σ'_k nelle incognite x, y, z sono equivalenti:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\Sigma'_k : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ kx + ky + kz = 6k \\ y + 2z = -6 \end{cases}$$

Per i valori di k trovati determinare le soluzioni dei sistemi Σ e Σ'_k.

(2) **Esercizio 2** Siano $S = \langle (1,1,1), (2,1,0) \rangle$ e $T = \langle (1,0,-1) \rangle$.

(a) Determinare una base di $S + T$ ed una base di $S \cap T$.

(b) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = S$, $Im(f) = T$.

(c) Costruire, se possibile, dandone la definizione esplicita, una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(g) = T$, $Im(g) = S$.

(d) Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

(e) Determinare, se possibile, un vettore di T la cui proiezione ortogonale su S sia $(1,1,1)$

(3) **Esercizio 3** Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $f(1,0,0) = (2,0,0)$, $f(0,1,1) = (0,2,2)$, $f(0,1,-1) = (0,0,0)$.

(a) Stabilire se l'endomorfismo f è invertibile.

(b) Calcolare gli autovalori di f.

(c) Stabilire se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

(d) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica.

(e) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$