NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA E GEOMETRIA, 11/06/2018
TEMA 1

QUESITI PRELIMINARI. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta:

(1) Una matrice quadrata che non ha rango massimo ha almeno una riga nulla.
(2) L'equazione $x + y + z = 2$ in $\mathbb{R}^3$ descrive una retta.

(1) **Esercizio 1** Risolvere il seguente sistema lineare Σ nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k:

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y + 5z = k \end{cases}$$

Scrivere, se possibile, un sistema lineare di quattro equazioni equivalente a Σ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(2) **Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z)$$

e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 7z = 0\}$.

(a) Determinare una base del nucleo di f.

(b) Verificare che $\ker(f)$ è in somma diretta con W e scrivere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ come unione di una base di $\ker f$ e di una base di W.

(c) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(d) Determinare, se possibile, una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ ed una funzione $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f \circ h = id_{\mathbb{R}^3}$.

(e) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su W sia $(1, -1, -1)$.

(3) **Esercizio 3** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.
(c) Stabilire se è possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.