

Foglio di esercizi numero 2
Corso di Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche
Prof.ssa Nicoletta Cantarini

1. Stabilire quali, tra i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 , sono sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 . Per ciascuno di questi esibire due insiemi diversi di generatori.

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0, x = -y + z\}$;
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z = 0\}$;
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 1 = 0, x = -y + z\}$;
- (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;
- (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, y = z\}$.

2. Considerati in \mathbb{R}^4 i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w) \mid x+z = 0, 3y-w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) \mid x+z = 0, y+2w = 0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di \mathbb{R}^4 ed esibire un insieme di generatori per ciascuno di essi.

3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

- a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
 - b) Determinare due diversi insiemi di generatori di W .
4. Stabilire se gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$

generano \mathbb{R}^2 . In caso affermativo scrivere un qualsiasi vettore di \mathbb{R}^2 come combinazione lineare degli elementi di \mathcal{B}_1 e di \mathcal{B}_2 .

5. Trovare un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalari ed un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non alla somma.

6. Sia V lo spazio vettoriale su \mathbb{R} costituito dalle funzioni da $[-1, 1]$ in \mathbb{R} dove, se $f, g \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è la funzione così definita: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $x \in [-1, 1]$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di V :

- $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
- $W = \{f \in V \mid f(-1) = -1\}$;
- $R = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ se } x < 0\}$;
- $S = \{f \in V \mid f(x) \leq f(y) \text{ se } x \leq y\}$;
- $T = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \forall x \in [-1, 1]\}$.