Foglio di esercizi numero 3

Corso di Algebra e Geometria

Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche

Proff.ssa Nicoletta Cantarini

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
trovare:

   a) una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori riga di A;

   b) una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori colonna di A.

2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (2, 2, 0, 3)$, $v_5 = (1, 0, 1, 1)$, $v_6 = (2, 0, 2, 0)$, $v_7 = (1, 7, 3, 2)$. Si dimostri che essi individuano un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ e si estragga una base di $\mathbb{R}^4$ dall'insieme $\{v_1, \dots, v_7\}$.

3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:
$$W = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0\}.$$

   a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

   b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W.

   c) Completare $\mathcal{B}$ ad una base di $M_2(\mathbb{R})$.

4. Dimostrare che gli insiemi
$$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$
sono basi di $\mathbb{R}^2$. Determinare le coordinate dei vettori $(1, 3)$, $(2, -1)$ rispetto a tali basi. Quali sono le coordinate del vettore $(0, 1)_{\mathcal{B}_1}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$?

5. Si considerino i vettori $v_1 = (t, 2t, -1)$, $v_2 = (-2, -4, t - 1)$, $v_3 = (1, -2, 1)$ di $\mathbb{R}^3$, al variare del parametro reale t. Determinare, se esistono, i valori del parametro t per i quali v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

6. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | b = -c \right\}$.

   (a) Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S.

   (c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ in due modi diversi.

   (d) Esibire un insieme di generatori di S che non sia una base di S.

7. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{(1, t), (-t, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Calcolare le coordinate del vettore $(2, 1)$ rispetto alla base corrispondente ad uno dei valori trovati.

8. Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w) \mid x+z = 0, 3y-w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) \mid x + z = 0, y + 2w = 0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinare $S \cap T$ e $S + T$.

9. Determinare l'intersezione e la somma delle seguenti coppie di sottospazi:

   a) $W_1 = \langle(-2, 3, -2)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$;

   b) $W_1 = \langle(1, -1, 1)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 1, 0), (1, 2, 1)\rangle$;

   c) $W_1 = \langle(1, -1, 1), (1, 0, -1)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle$.

10. Trovare due sottospazi W_1, W_2 di $\mathbb{R}^3$ tali che $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$, ma $\mathbb{R}^3$ non è la somma diretta di W_1, W_2.