Foglio di Esercizi 6
Corso di Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta

1. Dati due sottospazi vettoriali distinti U e V di $\mathbb{R}^4$, entrambi di dimensione 3, si ha:
   a) la somma di U e V è diretta;
   b) $U + V = \mathbb{R}^4$;
   c) $\dim(U \cap V) = 2$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare non nulla. Allora:
   a) f è suriettiva;
   b) f è iniettiva;
   c) se f non è iniettiva allora $\dim(\ker f) = 1$.

3. Siano $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 2)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, $v_4 = (1, 1, -1)$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $w_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Non esiste alcuna applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$;
   b) esistono infinite applicazioni lineari $g : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tali che $g(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$;
   c) ogni applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che $h(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$ è iniettiva.

4. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare.
   a) Se f è iniettiva allora per ogni $w \in W$, $f^{-1}(w)$ contiene un solo elemento di V;
   b) se $w \in Imf$ e $f^{-1}(w)$ contiene un solo elemento, allora f è iniettiva;
   c) se f è suriettiva allora per ogni $w \in W$, $f^{-1}(w)$ contiene un solo elemento di V.

5. Sia f un endomorfismo di V. Allora:
   a) la somma di $\ker f$ e Imf è diretta;
   b) f è iniettivo se e solo se è invertibile;
   c) se $v_1 \neq \alpha v_2$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $f(v_1) \neq \alpha f(v_2)$.

6. Sia $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Allora:
   a) S è vuoto;
   b) S è il sottospazio banale di $M_3(\mathbb{R})$;
   c) tutte le matrici di S hanno rango minore o uguale a due.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Esistono due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che A sia la matrice associata all'applicazione lineare identica $id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto a tali basi (fissate rispettivamente nel dominio e nel codominio di id);

b) se A è la matrice di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ rispetto ad una base di $\mathbb{R}^2$, allora f è iniettivo.

Risolvere i seguenti esercizi

1. Stabilire se l'insieme $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = xz\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo determinarne la dimensione ed una base.

2. Sia $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$.

   a) Calcolare la dimensione di S ed esibire una sua base;

   b) determinare un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^4$, di dimensione minima, tale che $S+T = \mathbb{R}^4$;

   c) determinare un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$, di dimensione massima, tale che $S \cap U = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

3. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Dimostrare che se U è un sottospazio vettoriale di V allora $f(U)$ è un sottospazio vettoriale di W.

4. Determinare, se possibile, un endomorfismo non nullo f di $\mathbb{R}^4$ tale che la somma di Imf e $\ker f$ sia diretta.

5. Si considerino le funzioni lineari $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che:

$$f(1,2,1) = (0,0,0), \quad f(1,1,1) = (1,2,1), \quad f(2,0,-1) = (1,2,1)$$

$$g(1,1,0) = (0,0,0), \quad g(-3,4,6) = (-5,-10,-5), \quad g(-1,4,5) = (0,0,0).$$

   a) Verificare che le funzioni f e g sono univocamente definite.

   b) Stabilire se le funzioni f e g coincidono.

   c) Costruire, se possibile, un endomorfismo h di $\mathbb{R}^3$ tale che $Imh = \ker f$ e $\ker h = Imf$.

6. Siano $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}$ e $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$.

   a) Determinare, se possibile, un endomorfismo h di $\mathbb{R}^4$ tale che $\ker h = S$, $Imh \subset T$ e $\ker h \oplus Imh = \mathbb{R}^4$.

   b) Determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $\ker f \subset T$, $Imf = S$ e $f \circ f = 0$. Quanti siffatti endomorfismi esistono?

7. Costruire, se possibile, due diversi endomorfismi f_1, f_2 di $\mathbb{R}^3$ tali che per $i = 1, 2$ si abbia:

$$f_i(1,1,0) = (1,1,1), \quad f_i(0,1,1) = (1,2,2), \quad f_i(1,0,-1) = (0,-1,-1), \quad f_i(1,2,1) = (2,3,3)$$

   e tali che $f_1 \circ f_2$ abbia immagine di dimensione 1.

Risposte alle domande

1. a) Falso. Per la formula di Grassmann due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 si intersecano in un sottospazio che ha almeno dimensione 2.

   b) Vero. Essendo U e V distinti, V contiene un vettore v linearmente indipendente dai vettori di U. Dunque $U + \langle v \rangle = \mathbb{R}^4$. Di conseguenza, $U + V = \mathbb{R}^4$.

c) Vero. Per la formula di Grassmann $\dim(U \cap V) \geq 2$. Del resto $U \cap V$ è contenuto in U (e in V), dunque $\dim(U \cap V) \leq 3$. Ma se fosse $\dim(U \cap V) = 3$, si avrebbe $U = V$, contro le ipotesi.

2. a) Falso. Per il Teorema delle dimensioni $\dim(Imf) \leq 2$, dunque f non può essere suriettiva.

   b) Falso. Controesempio: $f(x, y) = (x, x, x)$.

   c) Vero. La dimensione del nucleo di f può essere, a priori, 0,1,2. Se fosse $\dim(\ker f) = 0$, f sarebbe iniettiva e se fosse $\dim(\ker f) = 2$, f sarebbe nulla.

3. a) Vero. I vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti (4 vettori di $\mathbb{R}^3$) e i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono linearmente indipendenti. Un'applicazione lineare mantiene le relazioni di lineare dipendenza.

   b) Falso. I vettori v_1, v_2, v_3 individuano una base di $\mathbb{R}^3$ dunque le condizioni $g(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$ definiscono g su una base di $\mathbb{R}^3$ e dunque univocamente.

   c) Vero. L'immagine di tale applicazione ha infatti dimensione 3, dunque, per il Teorema delle dimensioni, nucelo banale.

4. a) Falso. Se f non è suriettiva e $w \notin Imf$, $f^{-1}(w) = \emptyset$.

   b) Vero. Per ogni elemento $w \in Imf$, $w = f(v)$, si ha infatti $f^{-1}(w) = v + \ker f$. Dunque se $f^{-1}(w)$ è costituita da un solo elemento vuol dire che $\ker f$ è banale e dunque f iniettiva.

   c) Falso. Se f è suriettiva ma non iniettiva, per ogni elemento $w \in W$ la controimmagine di w mediante f è costituita da infiniti elementi.

5. a) Falso. Controesempio: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (0, x)$. Si ha: $\ker f = Imf = \langle (0, 1) \rangle$.

   b) Vero. Per il Teorema delle dimensioni un endomorfismo iniettivo è anche suriettivo.

   c) Falso. Controesempio: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x, 0)$. Si ha: $f(0, 1, 0) = f(0, 0, 1) = (0, 0)$.

6. a) Falso. S contiene, ad esempio, la matrice nulla.

   b) Falso. S contiene, ad esempio, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) Vero. I vettori $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti. Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Allora ogni matrice A in S descrive un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = f(v_2)$. Poiché $rgA = Imf = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3) \rangle$, $rgA \leq 2$.

7. a) Vero. Sono $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

   b) Vero. Infatti $rgA = 2 = \dim(Imf)$. Dunque, per il Teorema delle dimensioni, $\dim(\ker f) = 0$.

Risultati degli esercizi

1. U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2. *a*) $\dim S = 3$, una base di S è $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; *b*) per esempio $T = \langle (0, 0, 1, 0) \rangle$; *c*) per esempio $U = T$.

3.

4. Ad esempio $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$.

5. Le funzioni f e g non coincidono. Ad esempio: $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (-x + y - z, -5x + 2y + z, -4x + y + 2z)$.

6. a) Una funzione h come richiesta non esiste; b) esistono infinite funzioni f come quella richiesta: una di queste è: $f(x, y, z, t) = (y - x, y - x, t - z, t - z)$.

7. Ad esempio, $f_1(x, y, z) = (-x + 2y - z, -2x + 3y - z, -2x + 3y - z)$, $f_2(x, y, z) = (y, y + z, y + z)$.