Corso di Laurea in Informatica
Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA
Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Sesto Appello
Bologna, 13 febbraio 2014

Esercizio 1. (6 punti) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente sistema lineare Σ_k, nelle incognite x, y, z,

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ky + z = k \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori di k l'insieme delle soluzioni di Σ_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Per ognuno di tali valori risolvere il sistema Σ_k.

b) Posto $k = 0$, determinare, se possibile, un sistema lineare di due equazioni equivalente a Σ_0.

c) Stabilire se il sistema Σ_k ammette soluzioni per ogni valore di k.

Esercizio 2. (9 punti) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale S_k di $\mathbb{R}^3$:

$$S_k = \langle (1, k, 0), (k, 1, 0), (k, k, k) \rangle.$$

a) Calcolare la dimensione di S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;

b) determinare una base $\mathcal{B}_k$ di S_k per ogni $k \in \mathbb{R}$;

c) determinare, se possibile, due numeri reali $k_1 \neq k_2$ tali che esista una applicazione lineare biunivoca $f : S_{k_1} \to S_{k_2}$.

Esercizio 3. (11 punti) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definito:

$$f(a, b, c) = (b, c, a).$$

a) Stabilire se f è invertibile. In caso affermativo determinare la forma esplicita della funzione f^{-1};

b) stabilire se 1 è autovalore di f e in caso affermativo determinare il relativo autospazio;

c) stabilire se f è diagonalizzabile;

d) stabilire se esistono basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f è:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. (4 punti) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri, per induzione su $n \geq 1 (n \in \mathbb{N})$, che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3^n - 1}{2} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$