

Foglio di esercizi numero 2
Corso di Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica a.a. 2013/14
Prof.ssa Nicoletta Cantarini

1. Stabilire quali, tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Per ciascuno di questi esibire due insiemi diversi di generatori.
 - (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0, x = -y + z\}$;
 - (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z = 0\}$;
 - (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 1 = 0, x = -y + z\}$;
 - (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;
 - (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, y = z\}$.
2. Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w) \mid x + z = 0, 3y - w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) \mid x + z = 0, y + 2w = 0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ ed esibire un insieme di generatori per ciascuno di essi.
3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

- a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
 - b) Determinare due diversi insiemi di generatori di W .
4. Stabilire se gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$

generano $\mathbb{R}^2$. In caso affermativo scrivere un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}_1$ e di $\mathcal{B}_2$.

5. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalari ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non alla somma.

6. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ costituito dalle funzioni da $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$ dove, se $f, g \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è la funzione così definita: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $x \in [-1, 1]$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di V :

- $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
- $W = \{f \in V \mid f(-1) = -1\}$;
- $R = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ se } x < 0\}$;
- $S = \{f \in V \mid f(x) \leq f(y) \text{ se } x \leq y\}$;
- $T = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \forall x \in [-1, 1]\}$.