Foglio di esercizi numero 4
Corso di Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica a. a. 2012/13
Prof.ssa Nicoletta Cantarini

Esercizio 1. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito nel modo seguente:

$$f(x,y,z,w) = (w, x+y, x+z, w).$$

Determinare nucleo e immagine di f.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da: $f(x,y,z,w) = (x+z, 3z-w, y)$. Verificare che f è lineare e determinare $\ker f$, Imf e le loro dimensioni.

Esercizio 3. Esiste una applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(0,1) = (2,4)$, $\varphi(1,1) = (1,5)$? È unica? In caso di risposta affermativa determinare nucleo e immagine di φ.

Esercizio 4. Verificare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x,y,z,w) = (x+w, w-z, 2x+2z)$$

è lineare. Determinare $\ker f$, Imf ed una base di ciascuno di tali sottospazi. Sia poi S il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (0,1,-2)$ e $v_2 = (1,0,2)$; determinare $f^{-1}(S)$.

Esercizio 5. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -4 \\ 15 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice A. Determinare $f^{-1}(1,1)$.

Esercizio 6. Siano V e V' due spazi vettoriali, di dimensione rispettivamente due e tre, e siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di V'. Sia poi $f : V \to V'$ l'applicazione lineare tale che $f(v_1) = u_1 - 2u_2 + u_3$, $f(v_2) = u_3 - 2u_1$. Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e determinare le componenti rispetto a $\mathcal{B}'$ del vettore $f(v)$ dove $v = -\frac{1}{2}v_1 + v_2$.

Esercizio 7. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare $\ker f$, Imf e le loro dimensioni, esibendo una base di tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Si consideri la seguente funzione f_s di $\mathbb{R}^3$ in se stesso:

$$f_s(x,y,z) = (x+y+z, x-y+s, sx+(s-1)z).$$

1. Per quali valori di s l'applicazione f_s è lineare?

2. Per i valori di s trovati al punto 1.:

   a) Determinare $\ker f_s$, $\mathrm{Im} f_s$.

   b) Esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}L$=$\mathrm{Im}f_s$? In caso affermativo costruire L.

c) Esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker T$=Imf_s? In caso affermativo costruire T.

d) Determinare la controimmagine mediante f_s del vettore $(-1, 1, 1)$.

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x, y) = (x + 3y, y, x + 3y)$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

2. Determinare $\ker f$ e Imf.

3. Determinare $f^{-1}(1, 1, -1)$.

Esercizio 10. Si considerino, al variare del parametro reale k, le seguenti applicazioni lineari:

$$f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f_k(x, y, z) = (kx + y - z, ky + (k + 1)z, (k - 1)z).$$

1. Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

2. Determinare per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.

3. Determinare per quali valori di k il vettore $(1, 0, 0)$ appartiene a Imf_k.

Esercizio 11. 1) Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $f(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $f(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $f(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.
2) Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $g(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $g(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $g(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.
3) Esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $h(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $h(1, 0, -1) = (1, 1, 1)$ e $h(0, 0, 1) = (1/2, -1/2, 1/2)$? In caso affermativo si dica se una siffatta applicazione è unica.

Esercizio 12. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che: $kerL = \langle(1, 0, 1), (1, 1, 0)\rangle$ e $ImL = \langle(1, 1)\rangle$.

Esercizio 13. Sia $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(x, y) = (x + y, x - y, y).$$

1. Si determini $KerT$: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è iniettiva?

2. Si determini ImT: se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione T è suriettiva?

3. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare $S \neq T$, $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $KerS = KerT$ e $ImS = ImT$.

Esercizio 14. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Siano dati i vettori $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 2)$ ed i vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, 0, 1, 2)$.

1. Esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L(u_1) = v_1 - v_3$, $L(u_2) = v_2 + v_4$ e $L(u_3) = v_2 - v_4$? È unica? In caso affermativo determinare $L(1, 0, 0)$.

2. Esiste un'applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ell(u_1) = v_1 - v_3$, $\ell(u_2) = v_2 + v_4$ e $\ker(\ell) = \langle(0, 4, 3)\rangle$?

Esercizio 15. Sia $T : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ l'applicazione definita da:

$$T(p(x)) = xp'(x)$$

dove $p'(x)$ indica la derivata prima del polinomio $p(x)$.

1. Mostrare che T è lineare.
2. Determinare nucleo e immagine di T.
3. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.
4. Determinare i polinomi p tali che $T(p) = p$.

Esercizio 16. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare $\ker f$, Imf e le loro dimensioni, fornendo una base di tali sottospazi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 17. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare così definita:

$$f(a, b, c) = (3a + c, -2a + b, -a + 2b + 4c).$$

Si richiede di:

1. dimostrare che f è un isomorfismo;
2. determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica;
3. dimostrare che i vettori $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$, $w = (0, 2, 0)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice A associata ad f rispetto a tale base.

Soluzioni.
Esercizio 1. Si ha $\ker f = \langle(1, -1, -1, 0)\rangle$ dunque T ha dimensione 3. Per esempio $T = \langle(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\rangle$ soddisfa le condizioni richieste.
Esercizio 2. $\ker f = \langle(-1, 0, 1, 3)\rangle$, $Imf = \mathbb{R}^3$, dunque $\dim(\ker f) = 1$ e $\dim(Imf) = 3$.
Esercizio 3. Esiste una ed una sola applicazione lineare φ soddisfacente le condizioni richieste. Si ha: $Im\varphi = \mathbb{R}^2$, $\ker \varphi = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Esercizio 4. $\ker f = \langle(1, 0, -1, -1), (0, 1, 0, 0)\rangle$, $Imf = \langle(1, 0, 2), (1, 1, 0)\rangle$. Si ha: $S = Imf$, dunque $f^{-1}(S) = \mathbb{R}^4$.
Esercizio 5. $\ker f = \langle(-\frac{1}{5}, 2, 5)\rangle$, $Imf = \mathbb{R}^2$. $f^{-1}(1, 1) = (-\frac{3}{25}, \frac{1}{5}, 0) + \langle(-\frac{1}{5}, 2, 5)\rangle$.
Esercizio 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $f(v) = (-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}'}$.
Esercizio 7. Se $\alpha = 0$, $Imf = \langle(1, 0, 1)\rangle$, $\ker f = \langle(1, 0, -1), (0, 1, 0)\rangle$; se $\alpha \neq 0$, $Imf = \langle(1, 0, 1), (1, 1, 2)\rangle$, $\ker f = \langle(1, 0, -1)\rangle$.
Esercizio 8. f_s è lineare se e solo se $s = 0$; $Imf_0 = \mathbb{R}^3$, $\ker f_0 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; non esiste una funzione L come richiesta; $T = 0$; $f_0^{-1}(-1, 1, 1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$.
Esercizio 9. La matrice di f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $Imf = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 0)\rangle$; $f^{-1}(1, 1, -1) = \emptyset$.

Esercizio 10. La matrice di f_k rispetto alle basi canoniche è: $\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & k+1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$; f_k è iniettiva per $k \neq 0, 1$; $(1, 0, 0) \in Imf_k$ per ogni k; ad esempio $S = \langle(0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$.
Esercizio 11. f esiste ed è unica; g come richiesta non esiste; esistono infinite funzioni h come richieste.
Esercizio 12. Una L come richiesta è, ad esempio, $L(x, y, z) = (-x + y + z, -x + y + z)$.
Esercizio 13. $\ker T = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, dunque T è iniettiva. T non è suriettiva, $ImT = \langle(1, 1, 0), (1, -1, 1)\rangle$; una applicazione S come richiesta è, ad esempio, $S(x, y) = (x - y, x + y, -y)$.
Esercizio 14. Esiste un'unica L come richiesta e vale $L(1, 0, 0) = (-1, -1, -\frac{7}{9}, -\frac{8}{3})$; non esiste ℓ come richiesta.
Esercizio 15. $ImT = \langle x, x^2, x^3\rangle$; $\ker T = \langle 1\rangle$; la matrice richiesta è: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; l'insieme dei polinomi fissati dall'applicazione T è $\langle x\rangle$.
Esercizio 16. Per $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}$, $Imf = \mathbb{R}^3$, $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; per $\alpha = 0$: $Imf = \langle(1, 1, 2), (0, 0, 1)\rangle$, $\ker f = \langle(0, 1, 0)\rangle$; per $\alpha = \frac{1}{2}$: $Imf = \langle(1, 1, 2), (0, 1, 0)\rangle$, $\ker f = \langle(-\frac{1}{2}, 1, 1)\rangle$.
Esercizio 17. La matrice di f rispetto alla base canonica è: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha rango massimo dunque f è un isomorfismo; la matrice di f rispetto alla base $\{u, v, w\}$ è: $\begin{pmatrix} 7/2 & 3/2 & 2 \\ -1/2 & 7/2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.