Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

12 marzo 2014

Esercizio 1. Dato il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z,

a) determinare le soluzioni di Σ;

b) determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che il sistema Σ sia equivalente al sistema lineare

$$\Sigma_t : \begin{cases} x + 3y = 1 + t^2 \\ y - tz = t - 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2y + 5t = 0 \\ 2x + 5y + 11t = 4 \\ x + y + (k^2 - k)z + (5 - k^2)t = -k^2 - 3 \\ -y + 2(k^2 - k)z + (3k^2 - 4)t = 2(k^2 + k - 4) \end{cases}$$

Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui sono infinite.

Esercizio 3. Determinare, se esistono, i valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ per i quali i sistemi lineari

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti.

Esercizio 4.

i) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare Σ_k, nelle incognite x, y, z, ammette soluzioni e, quando possibile, si determinino tali soluzioni:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

ii) Si determinino ora, quando possibile, le soluzioni del sistema lineare Σ_k, supponendo che esso sia un sistema nelle incognite x, y, z, t.

Esercizio 5. Stabilire per quali valori di k l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - ky - z = k\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

18 marzo 2014

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro reale b, il seguente sistema lineare:

$$\Sigma_b : \begin{cases} x + by + z = b \\ 2x + y + bz = 2b \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z e sia S_b l'insieme delle soluzioni di Σ_b.

a) Stabilire per quali valori del parametro reale b l'insieme S_b è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se per i valori trovati rispondendo alla domanda a), il sistema Σ_b è sempre risolubile e determinarne, quando possibile, le soluzioni.

Esercizio 2.

a) Stabilire se i vettori $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ generano $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se i vettori $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\}$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?

c) Stabilire se i vettori $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?

d) Stabilire se i vettori $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 3, 2), (-1, 3, 1)\}$ generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Si consideri il sottospazio $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ di $\mathbb{R}[x]$ costituito dai polinomi di grado minore o uguale a tre.

a) Determinare, se possibile, un insieme di generatori di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ costituito da polinomi con termine noto nullo.

b) Stabilire se l'insieme $\mathcal{B} = \{1 + x, x - x^2, x + x^3\}$ genera $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

c) Stabilire se i vettori $\{1 + x, x - x^2, x + x^3, 1 + x + x^2 + x^3\}$ generano $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Esercizio 4. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ab = 0, c = 0 \right\}$.

a) Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$,

b) Stabilire se esiste un sottospazio proprio W di $M_2(\mathbb{R})$ contenente S.

c) È possibile descrivere W mediante una equazione lineare?

25 marzo 2014

Esercizio 1. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - t = 0\}.$$

a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S.

b) Determinare un insieme di generatori di S che non sia una sua base.

c) Determinare, se possibile, tre vettori di S a due a due linearmente indipendenti che non costituiscano una base di S.

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle (1, 1, 0, 1), (-1, -1, 0, -1), (2, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 2) \rangle.$$

a) Determinare due basi diverse $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di S.

b) Stabilire se il vettore $(1, 4, 0, 3)$ appartiene ad S.

c) Stabilire se S coincide con $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = 0\}$. In caso negativo, esibire, se possibile, un vettore di S che non appartenga a T ed un vettore di T che non appartenga ad S.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 2\}$.

a) Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Esibire, se possibile, due vettori di S la cui somma non appartiene ad S.

c) Determinare una base di $\langle S \rangle$.

Esercizio 4. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b + c + d = 0, b - 2c + 2d = 0 \right\}$.

a) Verificare che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S.

c) Stabilire se la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene ad S. In caso affermativo scrivere A come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

d) Determinare, se possibile, due matrici B e C non appartenenti ad S tali che $B + C$ appartenga ad S.

1 aprile 2014

Esercizio 1. Si consideri il sottospazio vettoriale $U = \langle (1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ e sia $W_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - ky + z = k, x + y - kz = 2k\}$, $k \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare la dimensione di U e determinare una sua base $\mathcal{B}$;

(b) completare $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$;

(c) siano $v = (1, 2, 0)_{\mathcal{B}'}$ e $w = (1, 2)_{\mathcal{B}}$. Stabilire se $v = w$;

(d) determinare, se possibile, i valori di k tali che W_k sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

(e) per i valori di k determinati in (d), calcolare la dimensione di $U \cap W_k$.

Esercizio 2. Sia $S_k = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \mid p(1) = k\}$.

(a) Determinare per quali valori di k S_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Per i valori di k trovati:

(i) determinare una base $\mathcal{B}$ di S_k;

(ii) completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$;

(iii) calcolare le coordinate del polinomio $1+x+x^2$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

(b) Posto $k=2$, determinare $\langle S_2 \rangle$.

Esercizio 3. Costruire, se possibile, una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che:

(a) $v_1, v_2 \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 2z = 0\}$;

(b) $v_2, v_3 \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0\}$;

(c) $(1,1,1) = (1,0,-1)_{\mathcal{B}}$.

Calcolare le coordinate del vettore $(3,0,3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se $\mathcal{B}' = \{2u_1 - u_2 + u_3, u_1 + 2u_2 - 3u_3, u_1 + u_2 - 3u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

8 aprile 2014

Esercizio 1. Sia $V_t = \langle (2,0,t-1,t), (1,t-1,0,t), (1,0,0,t-1), (0,2t-2,1,0) \rangle$.

a) Calcolare la dimensione di V_t al variare di $t \in \mathbb{R}$ e determinare una base $\mathcal{B}_t$ di V_t per ogni t.

b) Per ogni t tale che $V_t \neq \mathbb{R}^4$, completare $\mathcal{B}_t$ in una base di $\mathbb{R}^4$ in due modi diversi.

c) Determinare, se possibile, un sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1, tale che $S \cap V_0 = \{0_{\mathbb{R}^4}\} = S \cap V_1$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x+y+z+t=0, x-2y+z-2t=0 \right\},$$

$$T_k = \langle \begin{pmatrix} 2 & -k \\ -1-k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1+k \\ -1 & -2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

1) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S e calcolarne la dimensione;

2) Determinare una base di T_k al variare di $k \in \mathbb{R}$ e calcolare la sua dimensione;

3) Stabilire se esistono valori di k tali che $S \subset T_k$;

4) Per ognuno dei valori trovati in 3), completare $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{C}$ di T_k e $\mathcal{C}$ in una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \langle (1,-5,3), (2,-3,2), (3,-1,1) \rangle, \quad W_2 = \langle (1,2,-1), (3,-8,5), (5,-4,3) \rangle.$$

1) Stabilire se $W_1 = W_2$ e trovare una base $\mathcal{B}$ di W_1.

2) Stabilire se il vettore $(4,1,0)$ appartiene a W_1 e, in caso affermativo, determinare le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

3) Costruire, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $W_1 \cap T = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Esercizio 4. Si consideri la sottovarietà lineare $S = (1,0,1) + \langle (0,1,0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1) Stabilire se S è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $y = 1$.

2) Stabilire se S è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = z$.

3) Determinare $\langle S \rangle$.