Note di Algebra Lineare

Nicoletta Cantarini[1]

[1]Liberamente (es)tratto da: Un Corso di Matematica, N. Cantarini, B. Chiarellotto, L. Fiorot, Ed. Progetto, Padova 2006

Indice

Introduzione

Queste note non hanno la pretesa di sostituirsi ad uno dei numerosi testi di Algebra Lineare disponibili in letteratura ma semplicemente di offrire agli studenti del corso di Laurea in Ingegneria Gestionale dell'Università di Bologna un supporto nella preparazione dell'esame di Geometria e Algebra.

Descriviamo un paio di problemi che gli studenti saranno in grado di risolvere alla fine del corso.

Problema A. (Problema enigmistico di basso livello)

i) Calcolare le età di due sorelle, età che indicheremo con E_1 ed E_2, sapendo che l'età della prima sommata a 2 volte l'età della seconda è pari a 22 e che 3 volte l'età della prima meno 2 volte l'età della seconda è pari a 2. Risolvere tale problema significa trovare E_1 ed E_2 tali che le due equazioni: $E_1+2E_2 = 22$ e $3E_1-2E_2 = 2$ siano soddisfatte contemporaneamente. Dalla prima equazione si ottiene $E_1 = 22 - 2E_2$ e, sostituendo questa espressione nella seconda equazione, si ottiene $E_2 = 8$ da cui $E_1 = 6$.

Potremmo rendere le cose più complicate facendo entrare in gioco anche l'età di una zia che indichiamo con Z. Allora il quesito potrebbe essere il seguente: calcolare le tre età E_1, E_2, Z, sapendo che l'età della prima sorella meno l'età della seconda meno quella della zia è pari a 2, e che 2 volte l'età della zia meno l'età della prima sorella più l'età della seconda è pari a 4. Allora $Z = 6$, $E_2 = 2$ ed $E_1 = 10$ è una soluzione, ma anche $Z = 6$, $E_2 = 4$ ed $E_1 = 12$ lo è. Quindi tali problemi possono avere diverse soluzioni, ma quante esattamente? Quando possiamo affermare con certezza che il problema ha una sola soluzione, come nel primo caso?

ii) Un secondo esempio di applicazione dei sistemi lineari viene dalla chimica. Supponiamo di voler bilanciare un'equazione chimica. Ad esempio, consideriamo la reazione tra sale comune NaCl e acido sulfureo H_2SO_4:

$$\mathrm{NaCl} + \mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Na_2SO_4} + \mathrm{HCl}.$$

È immediato vedere che per bilanciare tale equazione si trova

$$2\mathrm{NaCl} + \mathrm{H_2SO_4} \rightarrow \mathrm{Na_2SO_4} + 2\mathrm{HCl}$$

Bilanciare un'equazione chimica equivale a richiedere che il numero di atomi di ogni elemento prima di una reazione sia pari al numero di atomi presente dopo la reazione. Quindi per bilanciare l'equazione

$$x\mathrm{C_7H_8} + y\mathrm{HNO_3} \rightarrow z\mathrm{C_7H_5O_6N_3} + w\mathrm{H_2O}$$

dovremo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 7x = 7z \\ 8x + 1y = 5z + 2w \\ 1y = 3z \\ 3y = 6z + 1w. \end{cases}$$

Problema B. (Evoluzione del sistema)

Supponiamo che in un'isola vi siano volpi in numero pari a V e galline in numero pari a G. Supponiamo sia dato un modello per cui in un anno le galline si riproducono determinando un aumento della popolazione del 60 per cento mentre le volpi si mangiano le galline per un fattore 1 rispetto al loro numero. Come si sarà evoluto il sistema dopo un anno? Il numero di galline, che indichiamo con G_1, sarà pari a $G_1 = 1,6G_0 - V_0$ ovvero al numero iniziale di galline G_0 a cui si è aggiunto il numero di pulcini $0,6G_0$ meno il numero di galline mangiate dalle volpi, pari al numero iniziale di volpi, cioè V_0. D'altro canto supponiamo che il tasso di natalità delle volpi sia del 10 per cento e che le galline abbiano una malattia che si trasmette alle volpi che se le mangiano in modo tale che la mortalità delle volpi a causa di questa malattia sia proporzionale a metà del numero di galline. Questo significa che dopo un anno il numero di volpi V_1 sarà pari a $V_1 = 1,1V_0 - 0,5G_0$ (dove $0,5G_0$ è la quantità di volpi uccise dalla malattia). Cosa potrebbe succedere a questo punto? Se le volpi fossero troppe alla fine si mangerebbero tutte le galline e non resterebbe più nulla da mangiare per le volpi, così nell'isola non vi sarebbe più nessuno. Quante galline ci vogliono e quante volpi occorrono per avere un sistema che non si esaurisca? Oppure, in tale situazione, per ogni scelta iniziale di galline e volpi alla fine l'isola rimarrà deserta? Ovviamente bisognerebbe conoscere a priori l'evoluzione del nostro sistema, cioè sapere a priori quello che avverrà.

Lezione 1

Introduzione ai sistemi lineari

In questa lezione ci proponiamo di risolvere un qualsiasi sistema lineare a coefficienti reali attraverso un metodo noto come algoritmo di Gauss. In seguito useremo questo metodo anche per risolvere problemi diversi dai sistemi lineari e, nello stesso tempo, interpreteremo i sistemi lineari come casi particolari di una teoria molto più ampia.

1.0.1 Sistemi lineari: primi esempi

Una *equazione lineare* è un'equazione in cui le incognite compaiono con grado 1, cioè una equazione della forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b sono numeri assegnati e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le incognite. I numeri $a_1, \ldots, a_n$ si dicono *coefficienti* della equazione lineare, b si chiama *termine noto*. Se $b = 0$ l'equazione si dice *omogenea*. Una *soluzione* della equazione (1.1) è una n-upla di numeri $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ che sostituiti ordinatamente alle incognite verificano l'uguaglianza, cioè tali che

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b.$$

Ad esempio $(3, -1, 4)$ è una soluzione dell'equazione $2x_1 + 7x_2 - x_3 = -5$ perché $2 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) - 4 = -5$.

Un *sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$* è un insieme di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che devono essere soddisfatte contemporaneamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

I numeri $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ si chiamano coefficienti del sistema, $b_1, \ldots, b_m$ termini noti. Se $b_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ il sistema si dice *omogeneo*. Una *soluzione* del sistema lineare (1.2) è una n-upla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri che sia soluzione di tutte le equazioni del sistema. Ad esempio $(1, 2)$ è soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

In questo corso ci occuperemo esclusivamente di sistemi lineari a **coefficienti reali** cioè di sistemi della forma (1.2) in cui tutti i coefficienti a_{ij} delle incognite e tutti i termini noti b_i sono numeri reali. Le soluzioni che cercheremo, dunque, saranno sempre n-uple (ordinate) di numeri reali.

Dato un sistema lineare, ci prefiggiamo di rispondere alle seguenti domande:

1. Il sistema ammette soluzioni?
2. In caso affermativo, quante e quali sono?

In certi casi rispondere a queste domande è particolarmente facile. Vediamo qualche esempio:

Esempio 1.0.1 Consideriamo il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

È immediato osservare che la somma di due numeri reali non può essere contemporaneamente uguale a 3 e ad 1. Dunque il sistema non ammette soluzioni. In altre parole, le condizioni assegnate dalle due equazioni del sistema sono incompatibili perciò il sistema non può avere soluzioni.

L'esempio appena fatto giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.0.2 *Un sistema si dice compatibile se ammette soluzioni.*

Esempio 1.0.3 Consideriamo il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione il valore di x_2 fissato dalla seconda equazione, otteniamo: $x_1 = 3 - x_2 = 3 + 1 = 4$. Il sistema è dunque compatibile e ammette un'unica soluzione: $(4, -1)$. In questo esempio vengono assegnate due variabili (le incognite x_1 e x_2) e due condizioni (le due equazioni del sistema). Tali condizioni sono compatibili, cioè non si contraddicono, e sono 'indipendenti' nel senso che non possono essere ottenute una dall'altra. In sintesi: due variabili reali + due condizioni compatibili $\Rightarrow$ 1 sola soluzione.

Esempio 1.0.4 Consideriamo ora il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2. Diversamente da quanto succedeva nell'esempio precedente, qui le condizioni assegnate dalle due equazioni non sono 'indipendenti' nel senso che la seconda equazione si ottiene moltiplicando la prima per 2. Le due equazioni stabiliscono dunque la stessa relazione tra le variabili x_1 e x_2, quindi risolvere il sistema lineare assegnato equivale a risolvere semplicemente l'equazione $x_1 + x_2 = 3$. Tale equazione ha certamente soluzioni: ad esempio abbiamo visto nell'esempio precedente che $(4, -1)$ è soluzione dell'equazione, ma certamente anche $(1, 2)$ o $(0, 3)$ sono soluzioni dell'equazione. Quante sono allora esattamente le soluzioni di questa equazione? E come sono fatte? In questo caso abbiamo due variabili ed una sola condizione su di esse. Questo significa che una variabile è libera e siccome varia nell'insieme dei numeri reali, che sono infiniti, essa può assumere infiniti valori diversi. L'equazione assegnata ci permette di esprimere una variabile in funzione della variabile libera. Le soluzioni dell'equazione saranno tutte e sole della forma: $(x_1, 3 - x_1)$. Con questa scrittura si intende che la variabile x_1 può assumere tutti gli infiniti valori reali e che, affinché l'equazione $x_1 + x_2 = 3$ sia soddisfatta, deve essere $x_2 = 3 - x_1$. Naturalmente potevamo decidere di far variare liberamente la variabile x_2 e di esprimere x_1 in funzione di x_2. In tal caso avremmo descritto ogni soluzione del sistema nella forma $(3-x_2, x_2)$. Il sistema assegnato ha dunque infinite soluzioni. In sintesi: due variabili reali + 1 sola condizione $\Rightarrow$ infinite soluzioni.

Definizione 1.0.5 *Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.*

Nell'Esempio 1.0.4 abbiamo osservato che il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

è equivalente all'equazione $x_1 + x_2 = 3$. Naturalmente riuscire a capire se due sistemi sono equivalenti può essere molto utile, per esempio potremmo tentare di risolvere un sistema lineare riducendolo ad uno ad esso equivalente ma più semplice da risolvere.

Nel prossimo paragrafo introdurremo alcune nozioni utili per semplificare la scrittura di un sistema lineare.

1.1 Matrici

Dati due numeri naturali m, n, si chiama *matrice* $m \times n$ a coefficienti reali una tabella di mn numeri reali collocati su m righe e n colonne. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3.

Se $m = n$ la matrice si dice *quadrata* di ordine n. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 2.

Indicheremo con $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali e semplicemente con $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali.

Data una matrice A, il numero reale che compare nella i-esima riga e nella j-esima colonna di A viene detto *elemento di posto* (i,j) di A. Ad esempio nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

l'elemento di posto $(1,3)$ è 0 e l'elemento di posto $(2,2)$ è 3. Naturalmente due matrici $m \times n$ A e B sono uguali se coincidono entrata per entrata, cioè se l'elemento di posto (i,j) di A coincide con l'elemento di posto (i,j) di B, per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Data una generica matrice $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

essa può essere sinteticamente indicata nel modo seguente: $A = (a_{ij})$ dove a_{ij} è l'elemento di posto (i,j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ una matrice $n \times 1$, cioè una matrice costituita da una sola colonna, le matrici A e B possono essere moltiplicate. Il risultato è una matrice C con m righe ed una sola colonna: $C = (c_{i1})$, in cui l'elemento di posto $(i,1)$ si ottiene nel modo seguente: si fissa la i-esima riga di A

$$(a_{i1} \ \ldots \ a_{in})$$

e si moltiplicano, nell'ordine, le sue entrate per le entrate dell'unica colonna di B, dopodiché si sommano i numeri ottenuti. Si ha, cioè:

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{h1}.$$

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

si ha

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$$

$$c_{21} = 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 10$$

$$c_{31} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -1$$

cioè:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vedremo in seguito che il prodotto appena definito è solo un caso particolare del cosiddetto prodotto *righe per colonne* di due matrici. Ci limitiamo per ora a questa definizione 'ridotta' perché è quella di cui ci serviremo nella trattazione dei sistemi lineari. Infatti un sistema lineare della forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

può essere pensato in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e quindi può essere riscritto utilizzando il prodotto righe per colonne nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, più sinteticamente, come

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

dove $A = (a_{ij})$ è la matrice $m \times n$ dei coefficienti delle incognite, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle n incognite, e $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è la colonna degli m termini noti. La matrice $A = (a_{ij})$ si chiama matrice *incompleta* associata al sistema e la matrice

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si chiama matrice *completa* associata al sistema.

Esempio 1.1.1 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Allora la matrice incompleta e la matrice completa associate al sistema sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \sqrt{2} & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Usare le matrici è semplicemente un modo più comodo di scrivere e trattare i sistemi lineari. Ogni riga della matrice completa associata ad un sistema lineare equivale ad una equazione del sistema in cui vengono sottintese le incognite.

Definizione 1.1.2 *Una matrice si dice in forma a scala (per righe) o, semplicemente, a scala se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

(a) eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice;

(b) il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Esempio 1.1.3 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice in forma a scala (per righe) perché soddisfa le condizioni (a) e (b) della Definizione 1.1.2.

Al contrario, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

non è in forma a scala perché il primo elemento non nullo della terza riga non si trova più a destra del primo elemento non nullo della seconda riga (ma sotto di esso).

Definizione 1.1.4 *Sia A una matrice in forma a scala (per righe). Si chiama pivot di A il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) di A. Si chiama rango di A e si indica con $rg(A)$ il numero di righe non nulle di A o, equivalentemente, il numero dei suoi pivot.*

Esempio 1.1.5 Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i pivot di A sono 1, -1, $\frac{1}{3}$, perciò $rg(A) = 3$.

Osservazione 1.1.6 Sia $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ una matrice a scala. Per definizione di rango si ha

$$rg(A) \leq m. \tag{1.3}$$

Vale però anche la disuguaglianza

$$rg(A) \leq n. \tag{1.4}$$

Se $m \leq n$ (1.4) segue ovviamente da (1.3). Se $m > n$ è facile rendersi conto, disegnando una matrice a scala con un numero di righe m maggiore del numero n di colonne, che la proprietà (b) della Definizione 1.1.2 implica che il massimo numero di pivot di A è n.

Definizione 1.1.7 *Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ si dice a scala se la matrice $(A|\underline{b})$ è in forma a scala.*

Mostreremo ora come risolvere velocemente un sistema lineare a scala.

Esempio 1.1.8 Consideriamo il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccr|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

che è in forma a scala e ha rango 4. Ovviamente anche la matrice incompleta A è in forma a scala e notiamo che anch'essa ha rango 4. Il fatto che la matrice A sia in forma a scala indica che in ogni equazione del sistema compare una incognita che non compare nelle equazioni successive. Il sistema lineare può dunque essere facilmente risolto per sostituzioni successive dal basso, cioè a partire dall'ultima equazione e risalendo verso la prima: dalla quarta equazione abbiamo $x_4 = 1$; sostituendo $x_4 = 1$ nella terza equazione otteniamo $x_3 = x_4 = 1$. Sostituendo $x_3 = 1$ nella seconda equazione otteniamo $x_2 = 2+2x_3 = 2+2 = 4$. Infine, sostituendo $x_2 = 4$ e $x_3 = x_4 = 1$ nella prima equazione, otteniamo $x_1 = \frac{1}{4}(1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4) = \frac{1}{4}(1 - 8 - 3 - 4) = -\frac{7}{2}$. Il sistema assegnato ha dunque una sola soluzione: $(-\frac{7}{2}, 4, 1, 1)$.

Esempio 1.1.9 Consideriamo il sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 ottenuto da quello dell'esempio precedente cancellando l'ultima equazione:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccr|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

che è in forma a scala e ha rango 3. Anche la matrice incompleta A è in forma a scala e anch'essa ha rango 3. Naturalmente la soluzione $(-\frac{7}{2}, 4, 1, 1)$, trovata nell'esempio precedente, continua ad essere una soluzione del sistema che quindi è senz'altro compatibile. Quante sono, tuttavia, in questo caso le soluzioni del sistema? Anche in questo caso possiamo procedere per sostituzioni successive dal basso perché, come prima, in ogni equazione compare una incognita che non compare nelle equazioni successive. Dall'ultima equazione abbiamo $x_3 = x_4$. Sostituendo $x_3 = x_4$ nella seconda equazione, otteniamo $x_2 = 2 + 2x_3 = 2 + 2x_4$. Sostituendo x_2 e x_3 nella prima equazione otteniamo $x_1 = \frac{1}{4}(1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4) = \frac{1}{4}(1 - 4 - 4x_4 - 3x_4 - 4x_4) = \frac{1}{4}(-3 - 11x_4)$. Il sistema ha dunque infinite soluzioni della forma $(\frac{1}{4}(-3 - 11x_4), 2 + 2x_4, x_4, x_4)$ al variare di x_4 nell'insieme dei numeri reali.

Quanto illustrato negli esempi 1.1.8, 1.1.9 è un fatto del tutto generale. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 1.1.10 *Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare a scala nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Allora:*

(a) il sistema ammette soluzioni se e solo se $rg(A) = rg(A|\underline{b})$;

(b) se $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = n$ il sistema ammette una sola soluzione;

(c) se $rg(A) = rg(A|\underline{b}) < n$ il sistema ammette infinite soluzioni.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che cancellando la colonna $\underline{b}$ dalla matrice $(A|\underline{b})$ si ottiene ancora una matrice in forma a scala, quindi anche la matrice incompleta A associata al sistema è una matrice a scala. Inoltre, cancellando la colonna $(\underline{b})$ dalla matrice $(A|\underline{b})$, il numero di pivot può diminuire al più di 1. Più precisamente questo succede se e soltanto se la matrice A ha almeno una riga nulla, diciamo la i-esima, e l'elemento b_i è diverso da 0. In termini di equazioni questo equivale alla condizione $0 = b_i \neq 0$ che, evidentemente, non può essere soddisfatta. Pertanto se $rg(A) \neq rg(A|\underline{b})$, il sistema non ammette soluzioni. Supponiamo ora che sia $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = n$. Questo significa che il numero dei pivot, ossia il numero degli 'scalini', coincide con il numero delle incognite, quindi il sistema è costituito esattamente da n equazioni, l'incognita x_1 compare solo nella prima equazione, x_2 solo nelle prime due equazioni, x_3 solo nelle prime tre e così via. In particolare l'ultima equazione del sistema contiene solo l' incognita x_n e quindi ne fissa il valore. Sostituendo tale valore nella penultima equazione si ottiene l'unico valore della variabile x_{n-1} e così via, procedendo per sostituzioni successive dal basso come nell'Esempio 1.1.8, si ottiene l'unica soluzione del sistema. Se, invece, $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = k < n$ è possibile, procedendo per sostituzioni successive dal basso, esprimere k variabili in funzione delle altre $n-k$ che restano libere di variare nell'insieme dei numeri reali. Si ottengono così infinite soluzioni. $\square$

Esempio 1.1.11 Risolviamo il seguente sistema lineare a scala nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Notiamo che $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 2$ quindi, per la Proposizione 1.1.10(a), il sistema ammette soluzioni. Dal momento che il numero delle variabili è $4 > 2$, per la Proposizione 1.1.10(c), il sistema ammette infinite soluzioni. In sostanza abbiamo 4 variabili e due condizioni su di esse, perciò due variabili restano libere di variare nell'insieme dei numeri reali e potremo esprimere due variabili in funzione delle altre due. Procedendo per sostituzioni successive dal basso abbiamo:

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 1 = x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_4 + 1 = x_2 + \frac{3}{2}x_4 + 1.$$

Le infinite soluzioni del sistema sono pertanto della forma $(x_2 + \frac{3}{2}x_4 + 1,\ x_2,\ -\frac{1}{2}x_4,\ x_4)$, con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che avremmo potuto decidere di esprimere la variabile x_4 in funzione della variabile x_3 ($x_4 = -2x_3$) e, ad esempio, la variabile x_2 in funzione delle variabili x_1 e x_3 ($x_2 = x_1 + 3x_3 - 1$). In altri termini, la scelta delle variabili 'libere' non è obbligata. Tuttavia è sempre possibile scegliere come variabili libere quelle corrispondenti alle colonne della matrice A non contenenti pivot ed esprimere in funzione di queste le incognite corrispondenti alle colonne contenenti i pivot. Ad esempio, in questo caso i pivot, entrambi uguali ad 1, si trovano sulla prima e sulla terza colonna di A e nella nostra prima scelta noi abbiamo lasciato libere le variabili x_2 e x_4 ed espresso x_1 e x_3 in funzione di x_2 e x_4.

1.2 Algoritmo di Gauss

Abbiamo stabilito come risolvere un sistema lineare a scala. Cosa succede nel caso di un qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$? Sarebbe comodo poter ottenere un nuovo sistema lineare $A'\underline{x} = \underline{b}'$, questa volta a scala, equivalente al sistema di partenza, in modo tale da poter calcolare le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$ risolvendo il sistema a scala $A'\underline{x} = \underline{b}'$. Questo è esattamente quello che faremo.

Esempio 1.2.1 I seguenti sistemi lineari nelle incognite x_1, x_2, sono equivalenti:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Si verifica, infatti, facilmente che l'unica soluzione di ciascuno dei due sistemi è: $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Notiamo che la prima equazione è la stessa nei due sistemi e che il secondo sistema può essere ottenuto sostituendo la seconda equazione del primo con la differenza tra questa e la prima equazione:

$$2^a\text{equazione} \to 2^a\text{equazione} - 1^a\text{equazione}.$$

Come si può passare da un sistema ad uno ad esso equivalente? Per esempio eseguendo le seguenti operazioni:

(a) scambio di due equazioni;

(b) moltiplicazione di un'equazione per un numero reale diverso da 0;

(c) sostituzione della equazione i-esima con la somma dell'equazione i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α qualsiasi. In sintesi:

$$i\text{-esima equazione} \quad \longrightarrow \quad i\text{-esima equazione}+\alpha(j\text{-esima equazione}).$$

È immediato verificare che le operazioni (a) e (b) non alterano le soluzioni del sistema. In quanto alla operazione (c) basta osservare che essa coinvolge soltanto la i-esima e la j-esima equazione del sistema, quindi basta osservare che i sistemi

$$\begin{cases} j\text{-esima equazione} \\ i\text{-esima equazione} \end{cases} \qquad \begin{cases} j\text{-esima equazione} \\ i\text{-esima equazione} + \alpha(j\text{-esima equazione}) \end{cases}$$

sono equivalenti.

Traduciamo ora le operazioni (a), (b) e (c) in termini matriciali: scambiare due equazioni del sistema equivale a scambiare due righe della matrice completa associata al sistema; moltiplicare una equazione per un numero reale diverso da 0 equivale a moltiplicare una riga della matrice completa associata al sistema per un numero reale diverso da 0, cioè moltiplicare per tale numero ogni elemento della riga; infine l'operazione (c) equivale a sostituire la riga i-esima della matrice completa associata al sistema con la somma della riga i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α. Spieghiamo un po' meglio che cosa si intende con tale somma: siano $(a_{i1} \dots a_{in}\, b_i)$ e $(a_{j1} \dots a_{jn}\, b_j)$ rispettivamente la i-esima e la j-esima riga della matrice $(A|\underline{b})$. Sommare la i-esima riga con la j-esima moltiplicata per un numero α, significa effettuare la somma entrata per entrata:

$$(a_{i1} \dots a_{in}\ b_i) + \alpha(a_{j1} \dots a_{jn}\ b_j) = (a_{i1} + \alpha a_{j1} \dots a_{in} + \alpha a_{jn}\ b_i + \alpha b_j).$$

In virtù dell'importanza che tali operazioni avranno in seguito, diamo ad esse un nome:

Definizione 1.2.2 *Data una matrice A si chiamano operazioni elementari sulle righe di A le seguenti operazioni:*

(a) scambio di due righe;

(b) moltiplicazione di una riga per un numero reale diverso da 0;

(c) sostituzione della riga i-esima con la somma della riga i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α qualsiasi.

Osservazione 1.2.3 Osserviamo che nella operazione elementare (c) non richiediamo che il numero α sia non nullo. In effetti se $\alpha = 0$ l'operazione (c) equivale a lasciare la riga i-esima inalterata.

Data una qualsiasi matrice $A = (a_{ij})$ è possibile trasformare A in una matrice a scala attraverso operazioni elementari sulle righe di A. Tale procedimento è noto come *riduzione di Gauss* e l'algoritmo che si utilizza si chiama **Algoritmo di Gauss** e funziona nel modo seguente:

1. Se $a_{11} = 0$ si scambia la prima riga di A con una riga in cui il primo elemento è non nullo. Indichiamo con a tale elemento non nullo. Se il primo elemento di ogni riga di A è nullo, si va direttamente al punto 3.

2. Si controllano una dopo l'altra tutte le righe tranne la prima. Se il primo elemento di una riga è nullo si lascia quella riga inalterata. Se il primo elemento di una riga, diciamo la i-esima ($i > 1$), è uguale a $b \neq 0$, si sostituisce la riga i-esima con la somma della riga i-esima e della prima riga moltiplicata per $-\frac{b}{a}$.

3. A questo punto tutti gli elementi della prima colonna, tranne eventualmente il primo, sono nulli. Si considera dunque la matrice che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice ottenuta e si ricomincia dal punto 1.

Esempio 1.2.4 Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Utilizziamo l'algoritmo di Gauss per ridurre A a scala.

Dal momento che l'elemento di posto $(1,1)$ è nullo, scambiamo la prima con la seconda riga, ottenendo la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Il primo elemento della seconda riga della matrice ottenuta è 0, perciò lasciamo questa riga inalterata. Il primo elemento della terza riga, invece, è 2, quindi sostituiamo la terza riga con la somma della terza riga e della prima moltiplicata per -2. Otteniamo così la matrice:
$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora ogni elemento della prima colonna tranne il primo è uguale a 0. Passiamo a considerare la matrice che otteniamo cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice ottenuta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo un'altra volta l'algoritmo di Gauss: il primo elemento della prima riga, questa volta, è diverso da 0, perciò lasciamo inalterata la prima riga. Ora sostituiamo la seconda riga con la somma della seconda e della prima moltiplicata per 5, ottenendo:

$$5 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così ottenuto la matrice a scala:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto siamo in grado di risolvere qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$. La matrice completa associata al sistema è $(A|\underline{b})$. Utilizzando l'algoritmo di Gauss possiamo 'ridurre' $(A|\underline{b})$ a scala ottenendo una matrice $(A'|\underline{b}')$. Il sistema lineare $A'\underline{x} = \underline{b}'$ è equivalente al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ dal momento che ogni operazione elementare sulle righe di $(A|\underline{b})$ equivale ad una operazione sulle equazioni del sistema che ne preserva le soluzioni. Quindi per trovare le soluzioni del sistema di partenza risolveremo il sistema a scala $A'\underline{x} = \underline{b}'$, tenendo conto della Proposizione 1.1.10. Notiamo in particolare che, in conseguenza del ragionamento appena illustrato e del contenuto della Proposizione 1.1.10, dato un qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ a coefficienti reali **SOLO UNA** delle seguenti situazioni si può presentare:

1. il sistema NON ha soluzioni;

2. il sistema ha UNA SOLA soluzione;

3. il sistema ha INFINITE soluzioni.

Questo significa che non esiste alcun sistema lineare a coefficienti reali con un numero finito di soluzioni strettamente più grande di 1. Nel momento in cui un sistema lineare a coefficienti reali ha 2 soluzioni allora ne ha infinite.

Osservazione 1.2.5 Le mosse dell'algoritmo di Gauss non sono necessariamente obbligate. Nell'Esempio 1.2.4, ad esempio, anziché scambiare la prima con la seconda riga, avremmo potuto scambiare la prima con la terza riga. In questo modo, portando a termine l'algoritmo, avremmo ottenuto una matrice a scala diversa dalla matrice B. Dal punto di vista dei sistemi lineari questo significa semplicemente ottenere sistemi a scala diversi ma tutti equivalenti al sistema di partenza (e quindi equivalenti tra loro).

Esempio 1.2.6 Risolvere il seguente sistema lineare di quattro equazioni nelle cinque incognite u, v, w, x, y:

$$\begin{cases} u + 2v + 3w + x + y = 4 \\ u + 2v + 3w + 2x + 3y = -2 \\ u + v + w + x + y = -2 \\ -3u - 5v - 7w - 4x - 5y = 0 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Si tratta ora di ridurre la matrice $(A|\underline{b})$ in forma a scala utilizzando l'algoritmo di Gauss e, successivamente, di risolvere il sistema lineare associato alla matrice ridotta.

In questo primo esempio riportiamo i passi dell'algoritmo di Gauss descrivendo contemporaneamente le operazioni sulle equazioni del sistema che equivalgono ad ogni passo. Naturalmente il vantaggio dell'algoritmo di Gauss consiste proprio nel poter dimenticare equazioni ed incognite concentrandosi solo sulle matrici, quindi questa descrizione è puramente esplicativa.

L'elemento di posto $(1, 1)$ è non nullo perciò lasciamo la prima riga inalterata. Dopodiché effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe di $(A|\underline{b})$:

- 2^a riga $\rightarrow$ 2^a riga - 1^a riga;

- 3^a riga $\rightarrow$ 3^a riga - 1^a riga;

- 4^a riga $\rightarrow$ 4^a riga + $3(1^a$ riga).

Otteniamo così la seguente matrice (e l'equivalente sistema lineare):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v+3w+x+y=4 \\ x+2y=-6 \\ -v-2w=-6 \\ v+2w-x-2y=12 \end{cases}$$

Ora scambiamo la seconda con la quarta riga:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v+3w+x+y=4 \\ v+2w-x-2y=12 \\ -v-2w=-6 \\ x+2y=-6 \end{cases}$$

Ora sostituiamo alla terza riga la somma della terza riga e della seconda:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v+3w+x+y=4 \\ v+2w-x-2y=12 \\ -x-2y=6 \\ x+2y=-6 \end{cases}$$

Infine sostituiamo alla quarta riga la somma della quarta riga e della terza:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v+3w+x+y=4 \\ v+2w-x-2y=12 \\ -x-2y=6 \\ 0=0 \end{cases}$$

Il sistema di partenza è equivalente al sistema a scala che abbiamo ottenuto, in cui l'ultima equazione è diventata un'identità. Il rango della matrice incompleta e il rango della matrice completa della matrice a scala ottenuta coincidono e sono uguali a 3. Il numero delle incognite del sistema è 5, quindi il sistema ammette infinite soluzioni che dipenderanno da $5-3=2$ variabili libere. Risolviamo il sistema per sostituzioni successive dal basso: usando la terza equazione possiamo esprimere la variabile x in funzione di y:

$$x=-2y-6.$$

Nella seconda equazione sostituiamo x con la sua espressione in funzione di y e ricaviamo v in funzione di w e di y:

$$v=-2w+6.$$

Infine nella prima equazione sostituiamo x con la sua espressione in funzione di y, v con la sua espressione in funzione di w e ricaviamo u in funzione di w e di y:

$$u = -2v-3w-x-y+4 = -2(-2w+6)-3w-(-2y-6)-y+4 = w+y-2.$$

Dunque il sistema ha infinite soluzioni del tipo $(w+y-2, -2w+6, w, -2y-6, y)$ che dipendono da due variabili libere $w, y \in \mathbb{R}$.

1.3 Esercizi svolti

Esercizio 1.3.1 Risolvere il seguente sistema lineare nelle quattro incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ -x+2y-3z=-2 \\ -2y+3z-4t=-11 \\ -3z+4t=15 \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right).$$

Riduciamo la matrice $(A|\underline{b})$ in forma a scala utilizzando l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) = (A'|\underline{b}').$$

La matrice a scala ottenuta è la matrice completa associata al sistema lineare:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ -2y+3z-4t=-11 \\ -3z=3 \\ 4t=12 \end{cases}$$

Notiamo che $rg(A') = rg(A'|\underline{b}') = 4 =$ numero incognite. Il sistema di partenza ammette dunque un'unica soluzione che possiamo calcolare procedendo per sostituzioni successive dal basso: dalla quarta equazione abbiamo

$$t = 3;$$

e dalla terza equazione abbiamo

$$z = -1;$$

sostituendo questi valori di t e di z nella seconda equazione otteniamo

$$y = -2;$$

infine, sostituendo i valori di t, z, y nella prima equazione otteniamo

$$x = 1.$$

Dunque il sistema ha come unica soluzione la quaterna $(1, -2, -1, 3)$.

Esercizio 1.3.2 Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t, al variare del parametro reale α:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha + 1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha + 2)z + (\alpha + 5)t = 3\alpha - 1. \end{cases}$$

Svolgimento. In questo esercizio si ha a che fare con un sistema lineare in cui compare un parametro reale α. Questo significa che al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ottengono infiniti sistemi lineari diversi che noi risolveremo trattandoli il più possibile come un solo sistema lineare. Il modo di procedere resta sempre lo stesso, come se il parametro fosse un numero reale fissato. Per prima cosa, dunque, scriviamo la matrice completa associata al sistema:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2\alpha + 1 & 3 & 2\alpha - 1 \\ 3 & 4 & 3\alpha + 2 & \alpha + 5 & 3\alpha - 1 \end{array}\right)$$

e riduciamola in forma a scala mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 2 & 2\alpha-1 \\ 0 & 1 & 3\alpha-1 & \alpha+2 & 3\alpha-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-2 & 0 & 2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-3 & \alpha & 3\alpha-2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 3\alpha-3 & \alpha & 3\alpha-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right) = (A'|\underline{b}')$$

Dobbiamo ora stabilire cosa succede al variare del parametro α nell'insieme dei numeri reali. Dobbiamo cioè rispondere alle seguenti domande:

1. Per quali valori di α il sistema è compatibile?

2. Per i valori di α per cui il sistema è compatibile, quante soluzioni ammette e quali sono?

Come sappiamo la risposta viene fornita dalla Proposizione 1.1.10(a): dobbiamo confrontare il rango di A' con il rango di $(A'|\underline{b}')$. Notiamo che questi ranghi dipendono dal valore di α. Più precisamente: $rg(A') = rg(A'|\underline{b}') = 4$ per $\alpha \neq 0, 1$. In questo caso il sistema ha un'unica soluzione che possiamo calcolare procedendo per sostituzioni successive dal basso: la soluzione è $(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\alpha+2}{\alpha}, 1, \frac{1}{\alpha})$.

Per $\alpha = 0$ si ha

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

perciò $rg(A') = 3$ e $rg(A'|\underline{b}') = 4$, dunque il sistema non è risolubile.

Per $\alpha = 1$ si ha

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

perciò $rg(A') = 3 = rg(A'|\underline{b}')$, quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una variabile libera. Come al solito possiamo determinare tali soluzioni procedendo per sostituzioni successive dal basso: $(x_3, -1-2x_3, x_3, 1)$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.3.3 Si consideri il sistema lineare Σ_α nelle incognite x_1, x_2, x_3 dipendente dal parametro reale α:

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \alpha x_1 + (\alpha+3)x_2 + 2\alpha x_3 = \alpha + 2 \\ \alpha x_1 + (2\alpha+2)x_2 + 3\alpha x_3 = 2\alpha + 2 \\ 2\alpha x_1 + (\alpha+7)x_2 + 4\alpha x_3 = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_α interpretato ora come sistema lineare nelle 4 incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Svolgimento.

1. Consideriamo la matrice completa $(A|\underline{b})$ associata al sistema lineare Σ_α:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ \alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha & 2\alpha+2 \\ 2\alpha & \alpha+7 & 4\alpha & 2\alpha+4 \end{array}\right)$$
e riduciamola a scala con l'algoritmo di Gauss:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ \alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha & 2\alpha+2 \\ 2\alpha & \alpha+7 & 4\alpha & 2\alpha+4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right) = (A'|\underline{b}').$$
Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha - 1 \neq 0$, cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, si ha $rg(A') = rg(A'|b') = 3$ quindi, per la Proposizione 1.1.10, il sistema Σ_α ammette un'unica soluzione: $(\frac{2-\alpha}{\alpha}, 0, 1)$;

   se $\alpha = 0$ otteniamo la matrice:
$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

che non è in forma a scala ma può essere ridotta a scala sostituendo la seconda riga con la somma della seconda riga e della prima moltiplicata per $\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema di partenza risulta dunque equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_2 = 2 \\ 0 = 2/3 \end{cases}$$

che, ovviamente, non ha soluzioni;

infine, se $\alpha = 1$ si ha:

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

che possiamo ridurre in forma a scala ottenendo la matrice

$$(A''|\underline{b}'') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

quindi $rg(A'') = rg(A''|\underline{b}'') = 2$ perciò il sistema Σ_1 è equivalente al sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una variabile e l'insieme delle soluzioni risulta: $\{(1 - 4x_2, x_2, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$.

2. Aggiungere l'incognita x_4 significa aggiungere alla matrice completa $(A|\underline{b})$ associata al sistema una colonna di zeri corrispondenti ai coefficienti di x_4. Pertanto, riducendo $(A|\underline{b})$ in forma a scala, si otterrà la matrice:

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & 0 & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{array}\right).$$

Quindi, ragionando come sopra ma tenendo conto che in questo caso il numero di variabili è 4, si ottiene che:

per $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ il sistema ha infinite soluzioni della forma $(\frac{2-\alpha}{\alpha}, 0, 1, x_4)$ con $x_4 \in \mathbb{R}$;

per $\alpha = 0$ il sistema non ha soluzioni;

per $\alpha = 1$ il sistema ha infinite soluzioni della forma $(1-4x_2, x_2, 1, x_4)$, con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.3.4 Stabilire se esistono valori del parametro reale k tali che il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

sia equivalente al sistema lineare

$$\Pi_k : \begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ kx_1 - 4x_2 + 3x_3 = k \end{cases}$$

(tutti i sistemi si intendono nelle variabili x_1, x_2, x_3).

Svolgimento. Due sistemi sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. Risolviamo innanzitutto il sistema lineare Σ. La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Utilizzando l'algoritmo di Gauss possiamo ridurre $(A|\underline{b})$ in forma a scala, ottenendo la matrice

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Abbiamo: $rg(A') = rg(A'|\underline{b}') = 3$, dunque il sistema Σ ammette una sola soluzione che possiamo determinare procedendo per sostituzioni successive dal basso:

$$x_3 = 3; \quad x_2 = 2; \quad x_1 = \frac{1}{2}.$$

L'unica soluzione del sistema Σ è pertanto $(\frac{1}{2}, 2, 3)$.

Affinché Σ sia equivalente a Π_k è dunque necessario che $(\frac{1}{2}, 2, 3)$ soddisfi contemporaneamente tutte le equazioni di Π_k. Sostituiamo dunque $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ nelle equazioni di Π_k:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1 \\ 1 - 2 + 3 = 2 \\ \frac{k}{2} - 8 + 9 = k \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto due identità e la condizione necessaria $k = 2$. Pertanto $(\frac{1}{2}, 2, 3)$ è soluzione del sistema Π_k solo se $k = 2$. Possiamo quindi affermare che per $k \neq 2$ i sistemi Π_k e Σ non sono equivalenti ma non sappiamo ancora se i sistemi Σ e Π_2 sono equivalenti. Infatti ciò accade se e solo se $(\frac{1}{2}, 2, 3)$ è l'unica soluzione anche del sistema Π_2. Consideriamo allora la matrice completa associata al sistema Π_k per $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Riducendo questa matrice in forma a scala otteniamo la matrice:

$$(A''|\underline{b}'') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si ha dunque $rg(A'') = rg(A''|\underline{b}'') = 2 < 3$, dunque il sistema Π_2 ha infinite soluzioni. Possiamo allora concludere che non esistono valori di k tali che i sistemi Σ e Π_k siano tra loro equivalenti.

1.4 Esercizi proposti

1. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z:

   (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x - y + 4z = 10 \\ 3x + y + 5z = 15 \\ x + 3y - 3z = 6 \end{cases}$

2. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z, w:

(a) $\begin{cases} x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y - w = 3 \\ 2y + z + w = -3 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ 2x - z - w = 0 \\ x - y - 2w = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + z = 7 \\ x + y = 2 \\ 4x + 12y + z = 1 \end{cases}$

3. Discutere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

4. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + (k - k^2)x_3 + (5 - k^2)x_4 = -k^2 - 3 \\ -x_2 + 2(k^2 - k)x_3 + (3k^2 - 4)x_4 = 2(k^2 + k - 4) \end{cases}$$

Risolvere il sistema per i valori di k per i quali la soluzione non è unica.

5. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare, nelle incognite x, y, z, t, ammette soluzioni e, quando possibile, determinare tali soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -2x + 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + (a^2 + 2a + 3)z + (a^2 - 2)t = a + 6 \\ y + 2(a^2 + 2a + 1)z + (3a^2 - 2a - 7)t = 3a + 4 \end{cases}$$

6. Dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_{a,b} : \begin{cases} x + (2+a)y = b \\ (2+2a)x + 3y - (b+1)z = 1 + b \\ bx + by - (b+4)z = b^2 + 3b. \end{cases}$$

   (a) Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il sistema omogeneo associato ammette la soluzione $(a, -a, 0)$. (Si chiama sistema omogeneo associato al sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$.)

   (b) Dire per quali tra i valori a, b trovati al punto precedente il sistema $\Sigma_{a,b}$ è risolubile e determinarne le soluzioni.

7. Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 è compatibile. Determinare, quando possibile, le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + kx_3 + 2x_4 = k \\ x_1 + 6x_2 + kx_3 + 3x_4 = 2k + 1 \\ -x_1 - 3x_2 + (k-2)x_4 = 1 - k \\ kx_3 + (2-k)x_4 = 1 \end{cases}$$

Lezione 2

Spazi vettoriali

Questa lezione è dedicata allo studio degli spazi vettoriali. Attraverso il concetto di spazio vettoriale vogliamo innanzitutto costruire un modello di uno spazio di dimensione qualsiasi. Non dobbiamo dimenticare che, aldilà di qualsiasi astrazione, ognuno di noi possiede una idea intuitiva di dimensione legata alla vita quotidiana: viviamo e ci muoviamo in uno spazio (fisico) tridimensionale, disegnamo su fogli essenzialmente bidimensionali, e così via.

2.1 Definizione di spazio vettoriale reale

Cos'è uno spazio vettoriale (reale)? Uno spazio vettoriale è un insieme non vuoto V dotato di una somma, su cui 'agisce dall'esterno' l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Ma cosa vuol dire agire dall'esterno? Vuol dire che, preso un elemento v di questo insieme V e preso un qualsiasi elemento c di $\mathbb{R}$, viene associato a questa coppia un elemento di V che denoteremo con cv. Passiamo alla definizione vera e propria.

Definizione 2.1.1 *Diremo che un insieme non vuoto V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, se:*

- *su V è definita una operazione detta somma, $+_V$ (operazione interna), che è: commutativa, associativa, ammette elemento neutro, $\mathbf{0}_V$, detto vettore nullo, e tale che ogni elemento v di V ammetta opposto denotato con $-v$;*

- *è definita un'azione esterna di $\mathbb{R}$ su V, cioè un'applicazione $\mathbb{R} \times V \to V$, che ad ogni coppia (r, v) con $r \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ associa un unico elemento (che denoteremo con) $rv \in V$. Questa operazione è detta operazione esterna.*

Le precedenti operazioni godono delle seguenti proprietà di compatibilità:
(i) $1v = v$, *per ogni* $v \in V$.
(ii) $\forall v \in V$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v +_V \beta v$.
(iii) $\forall v, w \in V$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(v +_V w) = \alpha v +_V \alpha w$.
(iv) $\forall v \in V$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

Gli elementi di V sono detti vettori, gli elementi di $\mathbb{R}$ scalari; l'operazione esterna si dice anche prodotto per scalari. Talvolta, qualora non vi sia pericolo di confusione, indicheremo la somma $+_V$ in V semplicemente con $+$. Anche se lavoreremo sempre con i numeri reali è importante sapere che nella definizione di spazio vettoriale che abbiamo appena dato, l'insieme dei numeri reali può essere sostituito con un altro insieme avente analoghe proprietà, ad esempio $\mathbb{Q}$ (campo dei numeri razionali).

2.2 Proprietà degli spazi vettoriali

Elenchiamo in questo paragrafo alcune utili proprietà degli spazi vettoriali.

1. Calcoliamo il prodotto del numero reale 0 per il vettore $v \in V$: $0v$. Chi è questo elemento? Per la proprietà *(ii)* della definizione 2.1.1 si ha $0v = (0 + 0)v = 0v +_V 0v$. Sommando a destra e a sinistra l'opposto di $0v$, che denoteremo con $-0v$, si ha: $\mathbf{0}_V = 0v +_V (-0v) = 0v +_V 0v +_V (-0v) = 0v$; la prima uguaglianza vale poiché $(-0v)$ è l'opposto di $0v$, la seconda perché si aggiunge a due elementi uguali lo stesso elemento e infine l'ultima perché $0v +_V (-0v) = \mathbf{0}_V$ e $0v +_V \mathbf{0}_V = 0v$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha $0v = \mathbf{0}_V$ vettore nullo di V.

2. Per la definizione 2.1.1 (i) $1v = v$ per ogni $v \in V$. Ora considerando $(1+(-1))v$, per la proprietà distributiva si ottiene $\mathbf{0}_V = 0v = 1v +_V (-1)v = v +_V (-1)v$ quindi $(-1)v = -v$ è l'opposto di v. Tale opposto verrà indicato semplicemente con $-v$. Notiamo che se nel precedente ragionamento avessimo sostituito 1 con un qualsiasi numero reale α avremmo ottenuto che l'opposto di αv è $(-\alpha)v = -\alpha v$.

3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale $\alpha\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$. Infatti dalle proprietà precedenti degli spazi vettoriali si ha che:

$$\alpha\mathbf{0}_V = \alpha(\mathbf{0}_V +_V \mathbf{0}_V) = \alpha\mathbf{0}_V +_V \alpha\mathbf{0}_V.$$

Sommando ad ambedue i membri dell'uguaglianza l'opposto di $\alpha\mathbf{0}_V$, che indichiamo con $-\alpha\mathbf{0}_V$, otteniamo

$$\alpha\mathbf{0}_V +_V (-\alpha\mathbf{0}_V) = (\alpha\mathbf{0}_V +_V \alpha\mathbf{0}_V) +_V (-\alpha\mathbf{0}_V)$$

che, per la proprietà associativa e per la definizione di elemento neutro, equivale a

$$\mathbf{0}_V = \alpha\mathbf{0}_V + (\alpha\mathbf{0}_V +_V -\alpha\mathbf{0}_V) = \alpha\mathbf{0}_V +_V \mathbf{0}_V = \alpha\mathbf{0}_V.$$

4. Se $\alpha \neq \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha v \neq \beta v$ per ogni $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$. Infatti se $\alpha v = \beta v$, allora sommando a destra e a sinistra per l'opposto di βv, si avrebbe $(\alpha - \beta)v = \mathbf{0}_V$. Da cui moltiplicando ambedue i membri per $1/(\alpha - \beta)$ (essendo $\alpha - \beta \neq 0$) si otterrebbe $v = 1/(\alpha - \beta)\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ che contraddirebbe l'ipotesi $v \neq \mathbf{0}_V$. Dunque è stato assurdo pensare che αv e βv fossero eguali.

5. Può esistere uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un numero finito di vettori? Certamente un esempio è lo spazio vettoriale banale, $V = \{\mathbf{0}_V\}$, cioè lo spazio vettoriale costituito dal solo elemento nullo in cui le operazioni interna ed esterna sono banali: $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, $\alpha\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ per ogni α in $\mathbb{R}$. È facile verificare la validità degli assiomi della definizione 2.1.1. La domanda che ci poniamo ora è la seguente: esistono altri esempi di spazi vettoriali reali con un numero finito di elementi? Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un numero finito di elementi, i.e. un numero finito di vettori, diciamo $n \in \mathbb{N}$. Sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$. Per la proprietà precedente $v, 2v, 3v, 4v, \ldots, nv$ sono tutti diversi fra loro e poiché sono n devono essere tutti e soli i vettori di V. Ne segue che, essendo $(n+1)v$ un vettore di V, $(n+1)v$ dovrà essere uguale ad uno dei precedenti, ma ciò è assurdo perché si avrebbe $(n+1)v = sv$ con $s \in \mathbb{N}$, $s \leq n$, cioè $s \neq n+1$. È stato assurdo pensare che V contenesse solo un numero finito di elementi. Quindi l'unico spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con un numero finito di vettori è lo spazio vettoriale banale. Il metodo appena illustrato è detto delle "gabbie dei piccioni": se si ha un numero di gabbie inferiore al numero di piccioni e se si vogliono mettere tutti i piccioni in gabbia, allora necessariamente almeno una gabbia dovrà alloggiare più di un piccione.

2.3 Esempi

2.3.1 Spazio vettoriale banale

Ogni spazio vettoriale contiene il vettore nullo cioè l'elemento neutro rispetto alla somma. Prendiamo l'insieme formato dal solo vettore nullo $\{\mathbf{0}_V\}$, cioè lo spazio vettoriale banale introdotto in 2.2.5. In esso la somma e il prodotto per scalari sono definiti in modo ovvio:

$$\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V; \quad \lambda\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V, \ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

A titolo di esempio si noti che, con le definizioni date, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\mathbf{0}_V = (\alpha + \beta)\mathbf{0}_V = \alpha\mathbf{0}_V + \beta\mathbf{0}_V$. Torneremo ancora su questo esempio.

2.3.2 Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$

Consideriamo l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. (Ricordiamo che ordinare le coppie significa che in generale l'elemento (a, b) è diverso dall'elemento (b, a), ad esempio $(2, 3) \neq (3, 2)$.) Tale insieme viene indicato con $\mathbb{R}^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. Due elementi (α_1, α_2) e (β_1, β_2) di $\mathbb{R}^2$ sono uguali se e solo se $\alpha_1 = \beta_1$ e $\alpha_2 = \beta_2$. Vogliamo definire su $\mathbb{R}^2$ una struttura di spazio vettoriale. Occorre innanzitutto introdurre un'operazione interna che definiamo "componente per componente" nel modo seguente:

$$(\alpha_1, \alpha_2) +_{\mathbb{R}^2} (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$$

dove la somma in ogni componente è la somma di numeri reali. L'operazione $+_{\mathbb{R}^2}$ appena definita è commutativa e associativa poiché essa viene definita componente per componente mediante una operazione (la somma di numeri reali) che gode di tali proprietà. L'elemento neutro è $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$. Definiamo ora il prodotto per scalari: se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ definiamo $\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$. Anche in questo caso è chiaro che tutti gli assiomi della definizione di spazio vettoriale sono rispettati.

Analogamente indicheremo con $\mathbb{R}^3$ l'insieme delle terne ordinate di numeri reali e, più in generale, con $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, l'insieme delle $n - uple$ ordinate di numeri reali. Generalizzando quanto descritto sopra, definiamo su $\mathbb{R}^n$ una struttura di spazio vettoriale reale definendo la somma ed il prodotto per scalari come segue:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) +_{\mathbb{R}^n} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

e

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n).$$

Notiamo che tra gli spazi vettoriali così definiti vi è anche $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali inteso come spazio vettoriale su se stesso. In tal caso denotiamo i vettori di $\mathbb{R}^1$ con (a), $a \in \mathbb{R}$.

2.3.3 Matrici

Fissati $m, n \in \mathbb{R}$ l'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, può essere munito di una struttura di spazio vettoriale. Cominciamo con l'esempio di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, gli altri casi sono del tutto analoghi e si differenziano solo per la forma delle matrici. Definiamo l'operazione interna componente per componente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} +_{\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

dove $c_{11} = a_{11} + b_{11}$ come somma di numeri reali, $c_{12} = a_{12} + b_{12}$ e così via $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. L'elemento neutro rispetto alla somma così definita è la matrice nulla

$$\mathbf{0}_{\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiamo l'operazione esterna sempre componente per componente: dati $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ poniamo

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}.$$

Usando ancora una volta le proprietà dei numeri reali si verifica facilmente che le operazioni introdotte definiscono su $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ una struttura di spazio vettoriale reale. Si noti che, sia a livello di insiemi che a livello di spazi vettoriali, è possibile identificare $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^3$ e più in generale $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Con una piccola rotazione... della testa... si potrebbe pure identificare $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e in effetti questo è vero anche a livello di spazi vettoriali. Preciseremo meglio in seguito che cosa intendiamo.

In generale, date $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrici $m \times n$ definiamo $A + B = C$ dove $C = (c_{ij})$ è la matrice $m \times n$ di termine generico $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; inoltre, per ogni numero reale λ, definiamo λA come la matrice $m \times n$ ottenuta moltiplicando ogni entrata di A per λ:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

In questo modo abbiamo dotato $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ di una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

2.3.4 Insiemi di polinomi

Sia $\mathbb{R}[X]$ l'insieme dei polinomi nella indeterminata X a coefficienti in $\mathbb{R}$ e indichiamo con $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ i polinomi di $\mathbb{R}[X]$ di grado minore o uguale a n.

Anche su $\mathbb{R}[X]$ si può definire una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale: presi due polinomi $P(X)$ e $Q(X)$, di grado rispettivamente n e m, con $n, m \in \mathbb{N}$ e $n \leq m$: $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, $Q(X) = b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_1 X + b_0$, definiamo la loro somma in $\mathbb{R}[X]$ come

$$P(X) +_{\mathbb{R}[X]} Q(X) = \sum_{i=0}^{m} c_i X^i$$

con $c_i = b_i$ se $m \geq i \geq n+1$ e $c_i = b_i + a_i$ per $i \leq n$. Ad esempio, se $Q(X) = -X^2 + 4X - \sqrt{3}$ e $P(X) = 3X^4 + 2X + 6$, $P(X) +_{\mathbb{R}[X]} Q(X) = 3X^4 - X^2 + 6X + (6 - \sqrt{3})$.

La somma di polinomi così definita è commutativa e associativa; l'elemento neutro $\mathbf{0}_{\mathbb{R}[X]}$ per la somma è il polinomio di grado 0 il cui termine noto è zero, cioè il polinomio identicamente nullo. Ogni polinomio ammette opposto per tale somma: se $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, allora il suo opposto è dato da $-P(X) = -a_n X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0$. Sia λ un numero reale e sia $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polinomio, definiamo $\lambda P(X) = (\lambda a_n)X^n + (\lambda a_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (\lambda a_1)X + (\lambda a_0)$, cioè moltiplichiamo ogni monomio di $P(X)$ per λ. Si vede facilmente che il prodotto per scalari così definito gode della proprietà distributiva rispetto alla somma, e che $1P(X) = P(X)$. L'insieme $\mathbb{R}[X]$ dotato delle operazioni sopra descritte è quindi uno spazio vettoriale reale. In particolare $(-1)P(X)$ è l'opposto di $P(X)$.

Osservazione. Consideriamo ora il sottoinsieme $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ di $\mathbb{R}[X]$. Le operazioni che abbiamo definito su $\mathbb{R}[X]$ sono definite anche in $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ e osserviamo che la somma di due polinomi di grado minore o uguale a n è ancora un polinomio di grado minore o uguale a n e se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P(X) \in \mathbb{R}^{\leq n}[X]$, allora il polinomio $\lambda P(X)$ appartiene a $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$. In altre parole $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}[X]$ chiuso rispetto alle operazioni di $\mathbb{R}[X]$. Dunque $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ ha, con queste operazioni, una struttura di spazio vettoriale.

Questo è un esempio di sottoinsieme di vettori di uno spazio vettoriale su cui le operazioni dello spazio ambiente inducono una struttura di spazio vettoriale. Un tale sottoinsieme si dice sottospazio vettoriale, ma vedremo in dettaglio questa definizione nella Lezione 3.

Notiamo infine che le nostre conoscenze matematiche ci permettono di definire un'altra operazione all'interno dell'insieme dei polinomi $\mathbb{R}[X]$: la moltiplicazione di due polinomi (i.e. $(3X^2 + 2)(5X - 1) = 15X^3 - 3X^2 + 10X - 2$). Tale operazione non interviene tuttavia nella definizione di spazio vettoriale.

2.3.5 Spazi di funzioni

Costruiamo infine un ultimo esempio di spazio vettoriale. Consideriamo l'insieme delle applicazioni continue dall'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ verso $\mathbb{R}$ e indichiamo tale insieme con $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Muniamo tale insieme di una struttura di spazio vettoriale. Dati f, g due elementi di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ definiamo la funzione $h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ somma di f e g

$$f +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} g = h$$

come l'applicazione da $[0, 1]$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che il valore di h in $s \in [0, 1]$ sia dato da $h(s) = f(s) +_{\mathbb{R}} g(s)$, cioè dalla somma in $\mathbb{R}$ dei valori delle due funzioni f e g in s. Essendo la somma una applicazione continua allora anche h è una applicazione continua e quindi appartiene a $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Tale somma è commutativa e associativa (prese tre funzioni f_1, f_2, f_3 di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$, allora

$$(f_1 +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} f_2) +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} f_3 = f_1 +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} (f_2 +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} f_3)$$

poiché il valore in $s \in [0, 1]$ di ciascuna somma è: $(f_1(s) + f_2(s)) + f_3(s) = f_1(s) + (f_2(s) + f_3(s))$ per l'associatività della somma di numeri reali. L'elemento neutro rispetto alla somma è la funzione $\mathbf{0}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])}$, cioè la funzione identicamente uguale a 0; ogni $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ ammette opposto, cioè esiste $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ tale che

$$f +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} g = \mathbf{0}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])}.$$

Infatti, essendo $\mathbf{0}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])}$ la funzione identicamente nulla, si ha che l'opposto di una funzione f è la funzione g tale che $g(s) = -f(s)$ per $s \in [0,1]$. Dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ definiamo $(\lambda f)(s) = \lambda f(s)$. Tale applicazione è continua, quindi λf è ancora un elemento di $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$. Valutando di volta in volta le funzioni nei punti $s \in [0,1]$, si vede che le proprietà di spazio vettoriale sono verificate. Si noti ad esempio che la proprietà distributiva del prodotto per scalari rispetto alla somma è data dalla uguaglianza delle due funzioni continue

$$\lambda(f_1 +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} f_2) = \lambda f_1 +_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])} \lambda f_2,$$

il che si verifica valutando le due funzioni in $s \in [0,1]$:

$$\lambda(f_1(s) + f_2(s)) = \lambda f_1(s) + \lambda f_2(s).$$

In conclusione la definizione astratta di spazio vettoriale è un formalismo che si adatta a molte situazioni in apparenza ben diverse: numeri reali, n-uple, matrici, polinomi ... Quindi non ci interessano necessariamente quali siano le operazioni introdotte per definire una struttura di spazio vettoriale perché il comportamento di ogni spazio vettoriale risulta sempre lo stesso. Ad esempio in 2.3.5 il vettore opposto a f, che sappiamo essere $(-1)f$, è $-f$. Così come in $\mathbb{R}^3$ il vettore opposto a $v = (1,-1,5)$, e formalmente dato da $(-1)v$, si determina attraverso la legge di spazio vettoriale data su $\mathbb{R}^3$: $(-1)(1,-1,5) = (-1,1,-5)$.

Lezione 3

Combinazioni lineari e sottospazi

3.1 Sottospazi vettoriali

In ogni costruzione matematica, dopo aver definito una classe di oggetti aventi delle proprietà omogenee, risulta naturale introdurre la nozione di sottooggetti che rispettino tali proprietà. Da un punto di vista insiemistico, cioè quando gli oggetti sono insiemi, un sottooggetto di un insieme W è un sottoinsieme U, cioè un insieme i cui elementi sono elementi di W: $U \subseteq W$. Vogliamo allora che nella definizione di sottooggetto di uno spazio vettoriale si tenga conto della sua struttura, più ricca di quella di un semplice insieme: dovremo dunque fare in modo che ogni sottooggetto erediti questa struttura.

Definizione 3.1.1 *Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, un sottospazio vettoriale U di V è un sottoinsieme non vuoto $U \subseteq V$ su cui le operazioni di V inducono una struttura di spazio vettoriale reale.*

Che cosa vuol dire esattamente questa definizione? Sia V uno spazio vettoriale reale e sia U un suo sottoinsieme non vuoto. Dati due vettori u e v di U possiamo considerare $u +_V v$ dal momento che $U \subseteq V$ e quindi gli elementi di U sono, in particolare, vettori di V. In generale il vettore somma $u +_V v$ NON sarà un elemento di U. Dire che le operazioni di V inducono una struttura di spazio vettoriale su U significa che la somma in V ed il prodotto per scalari:

$$+_V : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

si restringono ad operazioni su U:

$$+_V : U \times U \longrightarrow U \qquad \cdot : \mathbb{R} \times U \longrightarrow U.$$

In particolare il vettore $u +_V v$ appartiene ancora ad U. In questo caso si usa dire che U è *chiuso* rispetto alla somma di V. Analogamente, dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in U$, il vettore λv è un elemento di V ma, in generale, se U è solo un sottoinsieme di V, λu NON è un elemento di U. Se, però, U è un sottospazio vettoriale di V allora λu appartiene ancora ad U. Diremo in questo caso che U è *chiuso* rispetto al prodotto per scalari di V. La Definizione 3.1.1 è dunque equivalente alla seguente:

Definizione 3.1.2 *Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, un sottospazio vettoriale U di V è un sottoinsieme non vuoto $U \subseteq V$ chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari definiti in V, cioè un sottoinsieme tale che:*

1. *per ogni $u, v \in U$ la somma $u +_V v \in U$;*

2. *per ogni elemento $u \in U$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in U$.*

Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V per indicare che un sottoinsieme U di V è un suo sottospazio scriveremo $U \leq V$.

Osservazione 3.1.3 Ogni spazio vettoriale V ha sempre almeno due sottospazi: V stesso e il sottospazio vettoriale banale $\{\mathbf{0}_V\}$. Chiaramente ogni sottospazio vettoriale contiene il vettore nullo $\mathbf{0}_V$.

Vediamo ora in alcuni esempi come applicare la Definizione 3.1.2.

Esempi 3.1.4 Supponiamo che il nostro spazio ambiente sia $V = \mathbb{R}^2$:

1. Consideriamo l'insieme costituito dal solo vettore nullo: $\{(0,0)\}$. Esso è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$: il sottospazio banale.

2. Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. L'insieme U non può essere un sottospazio vettoriale poiché non contiene il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$ che è $(0,0)$.

3. Cerchiamo di sopperire a questo fatto considerando ora $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, che è il cerchio di centro l'origine e raggio 1. Questa volta $(0,0) \in U$, ma U non è chiuso rispetto a $+_{\mathbb{R}^2}$: infatti, presi, ad esempio, $(1,0), (0,1) \in U$, la loro somma $(1,0) +_{\mathbb{R}^2} (0,1) = (1,1)$ non è un elemento del cerchio, quindi U non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

4. Prendiamo adesso $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$, cioè l'insieme dei punti del primo quadrante. In questo caso la somma di due vettori di U è ancora nel primo quadrante, l'elemento neutro $(0, 0)$ ci sta, ma se consideriamo, ad esempio, $\lambda = -3$ e $u = (2, 9)$, allora $\lambda u = (-6, -27)$ non appartiene ad U che quindi non è un sottospazio.

5. Si consideri $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$. Verifichiamo che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Siano $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ due elementi di U, tali che, cioè, $x_1 - 2y_1 = 0$ e $x_2 - 2y_2 = 0$. La somma dei due vettori: $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartiene ad U, infatti $x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0$. Analogamente, per ogni numero reale λ, $\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ è un elemento di U, dal momento che $\lambda x_1 - 2\lambda y_1 = \lambda(x_1 - 2y_1) = \lambda 0 = 0$. Usando la Definizione 3.1.2 concludiamo che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

6. Sia $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid yx = 0\}$ cioè l'insieme delle coppie (x, y) di numeri reali con almeno una componente uguale a 0. Osserviamo che l'insieme U non è chiuso rispetto alla somma, infatti i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ appartengono ad U ma non la loro somma: $(1, 1)$. Dunque U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

7. Si prenda $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 3x - 1 = 0\}$. Allora U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ dal momento che il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$, $(0, 0)$, non appartiene ad U.

Osservazione sugli esempi fatti

Per stabilire se un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V possono essere utilizzati due approcci:

1°. Se pensiamo che l'insieme considerato non sia un sottospazio vettoriale basterà portare un esempio di vettori che non soddisfino le condizioni della Definizione 3.1.2 come fatto negli esempi 2, 3, 4, 6, 7.

2°. Se invece pensiamo che l'insieme considerato sia un sottospazio vettoriale allora si procederà come nell'esempio 5 verificando la validità delle condizioni della Definizione 3.1.2.

Nell'incertezza, ovvero quando non abbiamo a priori un'idea sul fatto che l'insieme in oggetto sia o meno un sottospazio vettoriale, si procede sempre come in 2°. Se l'insieme non è un sottospazio si arriva ad un ostacolo il che consente di trovare un controesempio. Ad esempio, consideriamo l'insieme dell'esempio 3. Procedendo come in 5, una delle condizioni da verificare è che per ogni $v = (x, y)$ elemento di $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda v \in U$. Ora da $v \in U$ sappiamo che $x^2 + y^2 \leq 1$ quindi $\lambda v = (\lambda x, \lambda y)$ e $(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) \leq \lambda^2$ ma $\lambda v \in U$ se e solo se $\lambda^2(x^2 + y^2) \leq 1$. Ora è evidente che se v è tale che $x^2 + y^2 = 1$, ad esempio $v = (1, 0)$, per λ "grandi" $\lambda v \notin U$. Ad esempio $v = (1, 0) \in U$, ma preso $\lambda = 100$, $100v = (100, 0) \notin U$ perché $100^2 > 1$.

3.2 Generatori

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori di V e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali. Allora possiamo considerare per ogni indice $i = 1, 2, \ldots, n$ il vettore $\lambda_i v_i \in V$ e poi fare la somma in V dei vettori ottenuti:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(si noti che, per la proprietà commutativa della somma, l'ordine in cui vengono sommati gli elementi non altera il risultato finale).

Definizione 3.2.1 *Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V e dato un insieme di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V, si dirà che un vettore $v \in V$ è loro* **combinazione lineare** *se esistono dei numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ si dicono coefficienti della combinazione lineare.

Esempio 3.2.2 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

1. Il vettore $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ è combinazione lineare dei vettori $(1, -1), (0, \sqrt{5})$ in quanto $(\sqrt{5}, \sqrt{5}) = \sqrt{5}(1, -1) + 2(0, \sqrt{5})$;

2. una generica combinazione lineare dei vettori $(1, 0)$, $(0, 1)$ è $a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare dei vettori $(1, 0), (0, 1)$.

In ogni spazio vettoriale il vettore nullo è combinazione lineare di qualunque insieme di vettori. Infatti se $v_1, \ldots, v_n$ è un insieme di vettori in V spazio vettoriale, allora il vettore nullo $\mathbf{0}_V$ è uguale alla combinazione lineare nulla $\mathbf{0}_V = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$.

Che cosa succederebbe se tutti i vettori di V si potessero scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori come nell'esempio 2 di 3.2.2?

Definizione 3.2.3 *Un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V si dice* **finitamente generato** *se esiste un insieme finito di vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tali che ogni vettore di V sia loro combinazione lineare. I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono allora* **generatori** *di V.*

Esempio 3.2.4 Prendiamo la nostra vecchia conoscenza $\mathbb{R}^3$ e tre suoi vettori $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 2)$, $u_3 = (0, -2, 3)$. Vogliamo dimostrare che $\mathbb{R}^3$ è finitamente generato mostrando che $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$. Dobbiamo verificare che **ogni** vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di u_1, u_2, u_3 . Prendiamo un vettore qualsiasi di $\mathbb{R}^3$: (α, β, γ) con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che esistono ben definiti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda_1 u_1 +_{\mathbb{R}^3} \lambda_2 u_2 +_{\mathbb{R}^3} \lambda_3 u_3.$$

Esplicitiamo tale somma usando la somma ed il prodotto per scalari che abbiamo definito in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) &= \lambda_1(1, 1, -1) +_{\mathbb{R}^3} \lambda_2(0, 1, 2) +_{\mathbb{R}^3} \lambda_3(0, -2, 3) = \\ &= (\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1) +_{\mathbb{R}^3} (0, \lambda_2, 2\lambda_2) +_{\mathbb{R}^3} (0, -2\lambda_3, 3\lambda_3) = \\ &= (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3). \end{aligned}$$

Per calcolare i λ_i richiesti dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha = \lambda_1 \\ \beta = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \gamma = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3. \end{cases}$$

Il sistema ottenuto ha soluzione: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \frac{2}{7}\gamma - \frac{1}{7}\alpha + \frac{3}{7}\beta$ e $\lambda_3 = \frac{1}{7}(\gamma + 3\alpha - 2\beta)$, quindi i vettori u_1, u_2, u_3 sono dei generatori di $\mathbb{R}^3$. Si noti che anche l'insieme $\{(2, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ come pure $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$. Quindi gli insiemi di generatori non sono unici.

Esempio 3.2.5 Non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati. Prendiamo ad esempio lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[X]$ nella indeterminata X. Se fosse finitamente generato esisterebbe un numero finito di polinomi

$P_1(X), \ldots, P_n(X)$ che generano $\mathbb{R}[X]$, quindi ogni polinomio a coefficienti reali si scriverebbe come loro combinazione lineare. Sia g_i con $i = 1, \ldots, n$, il grado del polinomio $P_i(x)$ e sia g il massimo tra questi gradi. Allora ogni combinazione lineare di $P_1(X), \ldots, P_n(X)$ avrà al più grado g e non potrà mai avere grado superiore. In particolare un polinomio di grado $g+1$ non si potrà mai scrivere come combinazione lineare di $P_1(X), \ldots, P_n(X)$. Dunque i polinomi $P_1(X), \ldots, P_n(X)$ non sono dei generatori di $\mathbb{R}[X]$ per nessun n.

Osservazione 3.2.6 Sia $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ un insieme di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Allora ogni vettore v di V si scrive come loro combinazione lineare:

$$v = \lambda_1 u_1 +_V \lambda_2 u_2 +_V \ldots +_V \lambda_s u_s.$$

Tale scrittura è unica? In generale la risposta è no. Ad esempio l'insieme $\{(0), (1)\}$ è chiaramente un insieme di generatori dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}$ (perché ogni $(\alpha) \in \mathbb{R}$ è $(\alpha) = \alpha(1) + (0)$, ma la scrittura non è unica infatti $(0) = 0(1) + 0(0) = 0(1) + 1(0)$. Come ulteriore esempio si consideri l'insieme ordinato $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (2,1,1)\}$ di generatori di $\mathbb{R}^3$. Il vettore $(0,1,1)$ si può scrivere come $0(1,1,0) + 1(0,1,1) + 0(1,0,1) + 0(2,1,1)$, ma pure come $1(1,1,0) + 1(0,1,1) + 1(1,0,1) - 1(2,1,1)$.

Osservazione 3.2.7 Osserviamo che, dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V generato dall'insieme di vettori $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ e preso qualsiasi vettore $u \in V$, l'insieme di vettori $\{u_1, u_2, \ldots, u_s, u\}$ è pure un insieme di generatori di V. Ovviamente si possono continuare ad aggiungere vettori ottenendo sempre un insieme di generatori.

Definizione 3.2.8 *Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ un insieme di vettori di V. Il più piccolo sottospazio di V contenente $u_1, u_2, \ldots, u_k$ si dirà il sottospazio da essi generato e si indicherà con $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$. Tale sottospazio è costituito da tutte le combinazioni lineari di $u_1, u_2, \ldots, u_k$:*

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots k \right\}$$

Il contenuto di questa definizione va giustificato. Prima di tutto verificheremo che l'insieme formato da tutte le combinazioni lineari di $u_1, u_2, \ldots, u_k$ è un sottospazio vettoriale di V; poi vedremo che esso è contenuto in ogni sottospazio contenente $u_1, u_2, \ldots, u_k$, e che quindi è il più piccolo sottospazio soddisfacente questa proprietà. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$ una combinazione lineare di $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Allora $\lambda v = \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k) = \lambda\alpha_1 u_1 + \lambda\alpha_2 u_2 + \ldots + \lambda\alpha_k u_k$ è pure una combinazione lineare di $u_1, u_2, \ldots, u_k$ e quindi un elemento del nostro insieme. Se poi abbiamo due combinazioni lineari $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$ e $w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_k u_k$, allora la loro somma $v + w = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k) + (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_k u_k) = (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + (\alpha_2 + \beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)u_k$ è ancora una combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, quindi appartiene al nostro insieme che è pertanto un sottospazio vettoriale di V. D'altro canto se consideriamo un sottospazio $T \leq V$ contenente i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, per definizione di sottospazio, T contiene ogni loro combinazione lineare e quindi tutto $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k\rangle$.

Osserviamo che, vista la definizione 3.2.8, è chiaro che uno spazio vettoriale V è finitamente generato se e solo se esistono $v_1, \ldots, v_n$ vettori di V tali che $V = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Se invece di partire da un numero finito di vettori $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ di uno spazio vettoriale V partissimo da un generico sottoinsieme $S \subset V$, potremmo chiederci qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene S?

Definizione 3.2.9 *Dato un qualsiasi sottoinsieme S di uno spazio vettoriale reale V, indichiamo con $\langle S\rangle$ il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S. Allora $\langle S\rangle$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di S a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

Esempio 3.2.10 Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, allora $\emptyset \subset V$ e $\langle\emptyset\rangle = \{\mathbf{0}_V\}$. Ma anche $\{\mathbf{0}_V\} \subset V$ e $\langle\mathbf{0}_V\rangle = \{\mathbf{0}_V\}$.

Esempio 3.2.11 Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, lo spazio vettoriale generato da un vettore non nullo v è l'insieme $\langle v\rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ di tutti i multipli scalari di v.

3.3 Esercizi svolti

Esercizio 3.3.1 Stabilire se i seguenti insiemi di vettori generano $\mathbb{R}^3$:

(i) $(0, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$;

(ii) $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 1)$;

(iii) $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 3, 4)$.

Svolgimento. L'esercizio consiste nel stabilire se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si possa scrivere come combinazione lineare dei vettori di volta in volta indicati.

(i) Sia (α, β, γ) un generico elemento di $\mathbb{R}^3$. Ci chiediamo se esistono λ_1, λ_2, λ_3 in $\mathbb{R}$ tali che sia $(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda_1(0, 0, 1) + \lambda_2(2, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1)$, cioè $(\alpha, \beta, \gamma) = (2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3)$. Si tratta di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \beta = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \gamma = \lambda_1 + \lambda_3. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo: $\lambda_2 = \alpha - \beta$; sottraendo la prima equazione da due volte la seconda otteniamo: $\lambda_3 = 2\beta - \alpha$. Infine, sostituendo nella terza equazione l'espressione ottenuta di λ_3, otteniamo: $\lambda_1 = \gamma - 2\beta + \alpha$. Dunque per ogni $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo determinato i numeri reali λ_i che cercavamo. Pertanto l'insieme di vettori (i) genera tutto $\mathbb{R}^3$.

(ii) In questo esercizio l'insieme che ci viene proposto contiene solo due elementi. Anche in questo caso potremmo procedere come prima cercando di risolvere un sistema, ma questa volta il sistema avrà 3 equazioni e 2 incognite. Quindi è lecito aspettarsi che un tale sistema non abbia sempre soluzioni, cioè che vi siano dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che non sono generati dall'insieme (ii). In questo caso per risolvere il quesito sarà sufficiente esibire un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non è combinazione lineare di $(2, 3, 4)$ e $(3, 2, 1)$.

Consideriamo il vettore $(1, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^3$. Ci chiediamo: è possibile scrivere $(1, 0, 0)$ come combinazione lineare di $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 1)$? Se ciò fosse possibile esisterebbero λ_1 e λ_2 in $\mathbb{R}$ tali che $(1, 0, 0) = \lambda_1(2, 3, 4) + \lambda_2(3, 2, 1) = (2\lambda_1 + 3\lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2, 4\lambda_1 + \lambda_2)$. Quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 0 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = 4\lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

dovrebbe ammettere soluzione, ma dalla seconda e dalla terza equazione ricaviamo $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ che non soddisfano la prima equazione. Il sistema non ha soluzioni cioè il vettore $(1, 0, 0)$ non è combinazione lineare dei vettori $(2,3,4)$ e $(3,2,1)$. Questo dimostra che $(2,3,4)$ e $(3,2,1)$ non generano $\mathbb{R}^3$.

(iii) Anche in questo caso potremmo precedere come in (i) e, preso $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, determinare λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 in $\mathbb{R}$ tali che $(\alpha,\beta,\gamma) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,2,0) + \lambda_3(0,0,2) + \lambda_4(1,3,4)$.

Mostriamo invece un modo alternativo di procedere. Prima di tutto osserviamo un fatto di carattere generale: dato un insieme I di vettori di uno spazio vettoriale V e fissato un insieme S di generatori di V, se ogni elemento di S è combinazione lineare degli elementi di I, allora anche I è un insieme di generatori di V. Infatti ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare dei vettori di S che a loro volta sono combinazioni lineari dei vettori di I e quindi ogni vettore di V è combinazione lineare dei vettori di I. Osserviamo inoltre che i vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ generano $\mathbb{R}^3$, infatti ogni elemento (α,β,γ) è loro combinazione lineare:

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1).$$

Notiamo, dunque, che il vettore $(1,0,0)$ appartiene all'insieme dato e che si ha: $(0,1,0) = \frac{1}{2}((1,2,0) - (1,0,0))$; $(0,0,1) = \frac{1}{2}(0,0,2)$. Concludiamo, per quanto appena osservato, che l'insieme di vettori (iii) genera $\mathbb{R}^3$. Esplicitamente per un vettore qualsiasi (α,β,γ) di $\mathbb{R}^3$ si ha $(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(\frac{1}{2}((1,2,0) - (1,0,0))) + \gamma(\frac{1}{2}(0,0,2)) = (\alpha - \frac{\beta}{2})(1,0,0) + \frac{\beta}{2}(1,2,0) + \frac{\gamma}{2}(0,0,2)$.

Esercizio 3.3.2 Determinare due insiemi distinti di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado ≤ 2.

Svolgimento. L'insieme $\{1, x, x^2\}$ è certamente un insieme di generatori di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Infatti ogni elemento di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ è un polinomio della forma $a+bx+cx^2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ quindi $a + bx + cx^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$.

È molto facile, a questo punto, costruire un altro insieme di generatori: basterà aggiungere all'insieme già individuato un qualsiasi altro polinomio di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Così, ad esempio, l'insieme $\{1, x, x^2, 4x + 69x^2\}$ genera $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Ma pure $\{1, x, 4x + 69x^2\}$ è un insieme di generatori, mentre $\{x, x^2, 4x + 69x^2\}$ non lo è (verificarlo per esercizio).

Esercizio 3.3.3 Mostrare che l'insieme dei polinomi $3+x$, x^2, $1+x^2+x^3$ non è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

Svolgimento. Prendiamo un monomio di grado 0, ad esempio 1, e vediamo se è possibile scriverlo come combinazione lineare dei polinomi $3+x$, x^2, $1+x^2+x^3$, cerchiamo cioè α, β, γ tali che sia $1 = \alpha(3+x)+\beta x^2+\gamma(1+x^2+x^3) = 3\alpha+\gamma+\alpha x+(\beta+\gamma)x^2+\gamma x^3$. Ricordiamo che due polinomi sono uguali se i coefficienti dei termini dello stesso grado dei due polinomi sono ordinatamente uguali. Dobbiamo pertanto risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1 = 3\alpha+\gamma \\ 0 = \alpha \\ 0 = \beta+\gamma \\ 0 = \gamma. \end{cases}$$

Si vede immediatamente che il sistema trovato non ha soluzioni, pertanto i polinomi $3+x$, x^2, $1+x^2+x^3$ non individuano un insieme di generatori di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

Esercizio 3.3.4 Verificare che l'insieme delle matrici $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genera lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Svolgimento. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una qualunque matrice di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Allora $A = ae_{11}+be_{12}+ce_{21}+de_{22}$ (notiamo inoltre che tale scrittura è unica). Questo prova che $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ è un insieme di generatori di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Osserviamo che i coefficienti della combinazione lineare trovata coincidono con le entrate di A. Un altro insieme di generatori di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è l'insieme costituito dalle matrici $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.3.5 L'insieme dei polinomi di grado 2 a coefficienti reali nella variabile x è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$?

Svolgimento. Condizione necessaria affinché un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V sia un sottospazio di V è che S contenga il vettore nullo $\mathbf{0}_V$ di V. Il vettore nullo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ è il polinomio identicamente nullo, cioè il polinomio di grado 0 con termine noto uguale a 0, pertanto esso non è contenuto nell'insieme dei polinomi di grado 2. Concludiamo che l'insieme dei polinomi di grado 2 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 3.3.6 Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

(i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$;

(ii) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$;

(iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y = 0\}$.

Svolgimento.

(i) Come nell'esercizio precedente, osserviamo immediatamente che l'insieme A non contiene il vettore $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ pertanto A non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Gli insiemi B e C contengono $(0, 0, 0)$ ma questo non è sufficiente a dimostrare che essi siano sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Dobbiamo stabilire se B e C sono chiusi rispetto alle operazioni di $\mathbb{R}^3$, cioè se presi due vettori v, w in B (risp. C) la loro somma appartiene ancora a B (risp. C) e se preso un qualunque vettore v in B (risp. C) e un qualunque numero reale λ il prodotto λv appartiene a B (risp. C).

(ii) Siano $v = (x, y, z)$ e $w = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ elementi di B, cioè: $x + y + z = 0$ e $\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 0$. Allora il vettore $v + w = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z})$ appartiene a B dal momento che le sue componenti soddisfano l'equazione di B: $(x + \tilde{x}) + (y + \tilde{y}) + (z + \tilde{z}) = (x + y + z) + (\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z}) = 0 + 0 = 0$. Analogamente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartiene a B dal momento che $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = \lambda 0 = 0$. Quindi B è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Consideriamo ora l'insieme C: i vettori $v = (1, -1, 0)$ e $w = (-1, -1, 0)$ appartengono a C ma la loro somma $v + w = (0, -2, 0)$ non appartiene a C (perché $0^2 - 2 \neq 0$). Pertanto C non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Quest'ultimo esercizio ci fornisce un'indicazione che potrà essere utile: se un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è descritto da equazioni, tale sottoinsieme difficilmente sarà un sottospazio vettoriale se le equazioni coinvolte non sono lineari nelle incognite oppure se appare un termine noto. Per ora prenderemo questa osservazione solo come un'indicazione di massima.

Esercizio 3.3.7 Verificare che i seguenti insiemi di matrici sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e per ciascuno di essi esibire un insieme di generatori.

(i) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$

(ii) $B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\};$

(iii) $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$

Svolgimento. Come nell'esercizio precedente, per verificare che A, B e C sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ basta utilizzare la Definizione 3.1.2. Effettuiamo questa verifica soltanto per l'insieme A e lasciamo allo studente la verifica per gli insiemi B e C.

(i) L'insieme A è l'insieme delle matrici quadrate $M = (m_{ij})$ di ordine 3 ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) ad entrate reali, triangolari strettamente superiori, cioè delle matrici quadrate di ordine 3 per cui $m_{ij} = 0$ se $i \geq j$ (i.e. le matrici i cui elementi diagonali sono nulli e i cui elementi al di sotto della diagonale principale sono anch'essi nulli). Siano dunque $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ due elementi di A, con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Allora la matrice $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & a+\alpha & b+\beta \\ 0 & 0 & c+\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è evidentemente una matrice triangolare strettamente superiore e quindi appartiene all'insieme A. Analogamente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 & \lambda c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene all'insieme A. Pertanto A è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari ed quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Per determinare un insieme di generatori di A osserviamo che un suo generico elemento $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ si può sempre scrivere come:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ genera il sottospazio A.

(ii) Procedendo nello stesso modo otteniamo che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori del sottospazio B.

(iii) Infine, le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ generano C.

C è detto l'insieme delle *matrici simmetriche* di ordine 3.

3.4 Esercizi proposti

Esercizio 3.4.1 Costruire un esempio di un sottoinsieme di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituito da infiniti elementi, che non sia un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.4.2 Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - kz + 8t = k\}$$

sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Per i valori di k trovati determinare un insieme di generatori di S_k e, se possibile, esibire un vettore di $\mathbb{R}^4$ che non sia una combinazione lineare di questi.

Esercizio 3.4.3 Sia S l'insieme dei polinomi di grado 3 a coefficienti reali nella variabile x.

1. S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$?
2. Determinare il più piccolo sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}[x]$ contenente S.

Esercizio 3.4.4 Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0\}$.

1. Mostrare che S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
2. Scrivere, se possibile, S come unione di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ contenente S.

Lezione 4

Basi e dimensione

4.1 Dipendenza e indipendenza lineare

Nell'Osservazione 3.2.7 abbiamo visto che, dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V generato dai vettori u_1, u_2, …, u_s (quindi $V = \langle u_1, u_2, \dots, u_s \rangle$) si possono aggiungere all'insieme $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ altri vettori e ottenere ancora un insieme di generatori. Inoltre abbiamo visto che ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di u_1, u_2, …, u_s tramite $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$: $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_s u_s$, ma che tali λ_i non sono in generale unici. In questo paragrafo cercheremo di caratterizzare gli insiemi di vettori I per i quali valga il fatto che se un vettore si scrive come combinazione lineare dei vettori di I allora tale scrittura è unica. Se questi vettori sono anche dei generatori dello spazio vettoriale V potremo scrivere ogni vettore di V in maniera unica come loro combinazione lineare. Vedremo ora come per testare l'unicità della scrittura basti testarla per il vettore nullo $\mathbf{0}_V$.

Definizione 4.1.1 *In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V i vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$, $k \in \mathbb{N}$, si dicono* **linearmente indipendenti** *se il solo modo di scrivere il vettore nullo $\mathbf{0}_V$ come loro combinazione lineare è con tutti i coefficienti nulli, i.e.*

$$\mathbf{0}_V = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Se, al contrario, il vettore nullo si può scrivere in modi diversi come combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$, allora diremo che i vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$ sono **linearmente dipendenti**.

Esempi 4.1.2

1. In $\mathbb{R}^3$ i due vettori $(1,0,1),(2,1,1)$ sono linearmente indipendenti: infatti se dovessimo scrivere il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$ come loro combinazione lineare avremmo $(0,0,0)=\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(2,1,1)$ da cui otterremmo che $(0,0,0)=(\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2)$ cioè $\lambda_1=\lambda_2=0$.

2. Consideriamo ora in $\mathbb{R}^2$ l'insieme $I=\{(1,1),(2,1),(1,-1)\}$. Il vettore nullo si scrive in modi diversi come combinazione lineare dei vettori di I:

$$3(1,1)-2(2,1)+(1,-1)=0(1,1)+0(2,1)+0(1,-1)=(0,0),$$

quindi i vettori di I sono linearmente dipendenti.

3. In $\mathbb{R}^n$ consideriamo un insieme di vettori con la seguente proprietà: ciascun vettore ha una componente diversa da zero, diciamo la i-esima, e i rimanenti vettori hanno invece entrata i-esima nulla. Tali vettori sono linearmente indipendenti. Ad esempio consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i vettori $(2,1,0,0),(0,4,0,1),(0,5,1,0)$ (la prima componente del primo vettore è non nulla mentre la prima componente degli altri due vettori è nulla; il secondo vettore ha la quarta entrata diversa da zero mentre gli altri hanno quarta entrata nulla; infine il terzo vettore ha la terza entrata non nulla e i primi due hanno la terza entrata uguale a 0). Allora una loro combinazione lineare: $\alpha(2,1,0,0)+\beta(0,4,0,1)+\gamma(0,5,1,0)=(2\alpha,\alpha+4\beta+5\gamma,\gamma,\beta)$ è uguale a zero se e solo se $\alpha=\beta=\gamma=0$. Pertanto i vettori $(2,1,0,0),(0,4,0,1),(0,5,1,0)$ sono linearmente indipendenti.

4. Tra tutti gli insiemi di vettori possiamo scegliere anche l'insieme formato da un solo vettore. La domanda è la seguente: quando un vettore v di uno spazio vettoriale V è linearmente indipendente? Per definizione dobbiamo vedere in che modo possiamo scrivere il vettore nullo come sua combinazione lineare: $\lambda v=\mathbf{0}_V$. Ora, abbiamo già visto che se $v\neq\mathbf{0}_V$ allora $\lambda v=\mathbf{0}_V$ se e solo se $\lambda=0$. Se, invece, $v=\mathbf{0}_V$, allora per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$, si ha $\lambda\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V$. Quindi un vettore è linearmente indipendente se e solo se $v\neq\mathbf{0}_V$. Osserviamo inoltre che se un insieme di vettori contiene il vettore nullo, allora è un insieme linearmente dipendente: considerato infatti l'insieme $\{\mathbf{0}_V,v_2,v_3,\dots v_n\}$, la combinazione lineare $(50)\mathbf{0}_V+0v_2+0v_3+\cdots+0v_n=\mathbf{0}_V$ ma i suoi coefficienti non sono tutti nulli.

Osservazione 4.1.3 Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno dei due è multiplo dell'altro. Infatti se $v_1, v_2 \in V$ spazio vettoriale, allora v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mathbf{0}_V$. Supponiamo che sia $\lambda_1 \neq 0$, allora $v_1 = -(\lambda_2/\lambda_1)v_2$ quindi v_1 è multiplo di v_2.

Osservazione 4.1.4 Supponiamo che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ di V siano linearmente dipendenti. Per definizione questo significa che è possibile scrivere

$$\mathbf{0}_V = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$$

con qualcuno dei coefficienti reali a_i diverso da 0. Tanto per fissare le idee, supponiamo che sia $a_1 \neq 0$. Allora $v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \ldots - \frac{a_k}{a_1}v_k$, cioè v_1 è combinazione lineare di $v_2, \ldots, v_k$. Abbiamo dunque mostrato che dire che k vettori sono linearmente dipendenti significa dire che uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Osservazione 4.1.5 È importante notare che se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora qualsiasi sottoinsieme di $\{v_1, \ldots, v_k\}$ continua ad essere costituito da vettori linearmente indipendenti. Infatti dire che $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti significa che nessuno di questi k vettori è combinazione lineare degli altri pertanto questa proprietà resta vera se si eliminano vettori dall'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

La definizione 4.1.1 risponde al quesito introdotto all'inizio della lezione, infatti vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.1.6 *In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, $k \in \mathbb{N}$, sono linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare si scrive in modo unico:*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 + \cdots + \lambda'_k u_k, \qquad \lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda'_1;\ \lambda_2 = \lambda'_2; \ldots; \lambda_k = \lambda'_k.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Per ipotesi sappiamo che i vettori $u_1, \ldots, u_k$ sono linearmente indipendenti e vogliamo mostrare che ogni vettore in $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_k$. Supponiamo di poter scrivere:

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 + \cdots + \lambda'_k u_k$$

per qualche $\lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Allora possiamo scrivere

$$\mathbf{0}_V = v - v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k - (\lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 + \cdots + \lambda'_k u_k)$$

e per la proprietà distributiva del prodotto per scalari rispetto alla somma:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_V &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k - \lambda'_1 u_1 - \lambda'_2 u_2 + \cdots - \lambda'_k u_k \\ &= (\lambda_1 - \lambda'_1) u_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) u_2 + \cdots + (\lambda_k - \lambda'_k) u_k. \end{aligned}$$

Ora, dal momento che $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti, l'unico modo di scrivere il vettore nullo come loro combinazione lineare è a coefficienti tutti nulli. Pertanto $\lambda_i = \lambda'_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$, cioè esiste un solo modo di scrivere v come combinazione lineare di $u_1, \dots, u_k$.

"$\Leftarrow$" In questo caso la nostra ipotesi è che ogni vettore che è combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$ lo sia in modo unico. Automaticamente il vettore nullo è loro combinazione lineare (lo è di ogni insieme di vettori): $\mathbf{0}_V = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_k$ e questa scrittura è unica per ipotesi. Quindi abbiamo dimostrato che i vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti. **C. V. D.**

4.2 Basi e dimensione

Siano V uno spazio vettoriale e $I = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un insieme di vettori. Nelle sezioni precedenti abbiamo risolto i seguenti quesiti:

Quesito 1: quando è possibile scrivere ogni vettore di V come combinazione lineare dei vettori di I? Risposta: quando I è insieme di generatori di V.

Quesito 2: quando è possibile scrivere ogni combinazione lineare di vettori di I in modo unico? Risposta: quando I è insieme di vettori linearmente indipendenti.

In questo paragrafo uniremo queste due nozioni: vogliamo che ogni vettore di V si scriva in modo unico come combinazione lineare degli elementi di I. In questa frase il termine "ogni" indica che stiamo cercando un insieme di generatori e il termine "unico" che stiamo cercando un insieme di vettori lineramente indipendenti.

Definizione 4.2.1 *In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V un insieme (finito) ordinato di vettori $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ si dice base (finita) di V se è un insieme di generatori linearmente indipendenti di V.*

Si noti che se V ha una base finita allora è finitamente generato, ma non tutti gli insiemi di generatori sono basi. Mostreremo come, dato un insieme di generatori di uno spazio vettoriale, sia possibile trovarne un sottoinsieme che risulti ancora un insieme di generatori. Cerchiamo di essere più precisi:

Proposizione 4.2.2 *Sia $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ un insieme di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Se i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sono linearmente dipendenti esiste un sottoinsieme proprio di I costituito da generatori di V.*

Dimostrazione. Sia

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_V$$

una relazione di dipendenza tra i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, cioè una scrittura del vettore nullo in cui non tutti i coefficienti sono nulli e supponiamo, per fissare le idee, $\lambda_i \neq 0$. Allora sommando il vettore $-\lambda_i u_i$ ad ambedue i membri della precedente relazione si ha:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} \cdots + \lambda_k u_k = -\lambda_i u_i$$

e, poiché $\lambda_i \neq 0$, possiamo moltiplicare entrambi i membri per $-\frac{1}{\lambda_i}$ ottenendo

$$u_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} u_2 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} u_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} u_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} u_k.$$

Sia dunque v un qualunque vettore di V. Allora possiamo scrivere v come combinazione lineare dei vettori $u_1, u_2, \ldots, u_k$, dal momento che questi generano V:

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_{i-1} u_{i-1} + \beta_i u_i + \beta_{i+1} u_{i+1} \cdots + \beta_k u_k$$

e sostituendo ad u_i l'espressione precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_{i-1} u_{i-1} + \beta_{i+1} u_{i+1} \cdots + \beta_k u_k + \\ &+ \beta_i \Big(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} u_2 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} u_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} u_{i+1} \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} u_k \Big) \end{aligned}$$

che è una combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots u_k$, infatti:

$$\begin{aligned} v &= \left(\beta_1 - \beta_i \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)u_1 + \left(\beta_2 - \beta_i \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\right)u_2 + \cdots + \left(\beta_{i-1} - \beta_i \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)u_{i-1} + \\ &+ \left(\beta_{i+1} - \beta_i \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)u_{i+1} + \cdots + \left(\beta_k - \beta_i \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)u_k \end{aligned}$$

e quindi $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots u_k$ sono un insieme di generatori di V. **C.V.D.**

Abbiamo dunque dimostrato che, dato un insieme di generatori, se questi sono linearmente dipendenti possiamo eliminarne alcuni ed ottenere ancora un insieme di generatori. Ma se l'insieme di generatori I fosse un insieme di vettori linearmente indipendenti? Quanto detto prima non sarebbe più vero. Infatti se in un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti esistono dei vettori di v che sono combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ ma non di $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$. Ad esempio v_k non è combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ (ma bensì di $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$, infatti $v_k = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_{k-1} + (1)v_k$). Concludendo, un insieme di generatori può essere raffinato se tali vettori sono linearmente dipendenti. Ne deduciamo che la costruzione di una base di uno spazio vettoriale V è legata all'individuazione del minimo numero di generatori di V.

Abbiamo visto quando è possibile eliminare un vettore da un insieme di generatori ottenendo ancora un insieme di generatori, ora vediamo quando è possibile aggiungere un vettore ad un insieme di vettori linearmente indipendenti ottenendo ancora un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Osservazione 4.2.3 *In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V sia dato un insieme di vettori $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ linearmente indipendenti. Allora i vettori $u_1, u_2, \dots, u_k$, u sono linearmente indipendenti se e solo se u non appartiene al sottospazio $\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle$.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo che $u_1, u_2, \dots, u_k, u$ siano linearmente indipendenti e che, per assurdo, u appartenga a $\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle$, allora $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Sommando $-u$ ai due membri dell'uguaglianza otteniamo $\mathbf{0}_V = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k + (-1)u$ e, poiché il coefficiente di u è diverso da zero, i vettori $u_1, u_2, \dots, u_k, u$ sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi.

"$\Leftarrow$" Supponiamo ora che u non appartenga al sottospazio $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$ e supponiamo, per assurdo, che $u_1, u_2, \ldots, u_k, u$ siano linearmente dipendenti, pur essendo $u_1, u_2, \ldots, u_k$ linearmente indipendenti. Una relazione di dipendenza per $u_1, u_2, \ldots, u_k, u$ sarà data da

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha u = \mathbf{0}_V \tag{4.1}$$

con qualcuno dei numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha$ diverso da zero. Ora α non può essere uguale a 0, poiché allora avremmo una relazione di dipendenza tra $u_1, u_2, \ldots, u_k$ che sono linearmente indipendenti, quindi $\alpha \neq 0$ e $\alpha u = -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_k u_k$. Moltiplicando tale uguaglianza per $1/\alpha$, si ottiene u come combinazione lineare di $u_1, u_2, \ldots, u_k$, contro l'ipotesi. **C.V.D.**

Finora quello che abbiamo fatto è stato da una parte, nel caso in cui avessimo un insieme di generatori, mostrare come togliere alcuni vettori e mantenere ancora un insieme di generatori, e dall'altra, nel caso in cui avessimo un insieme di vettori linearmente indipendenti, mostrare come aggiungere altri vettori e mantenere il fatto che fossero linearmente indipendenti. Ma questi due procedimenti hanno un termine? Sì: essi terminano nella individuazione di una base. Riassumiamo quanto detto nel seguente corollario:

Corollario 4.2.4 *Dati uno spazio vettoriale V ed un insieme B di vettori di V, i fatti seguenti sono equivalenti:*

1. *B è una base di V;*
2. *B è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti;*
3. *B è un insieme minimale di generatori di V ;*

(qui massimale e minimale si intendono rispetto all'ordine dato dalle inclusioni come sottoinsiemi di V).

Siamo al risultato culmine della teoria: ogni spazio vettoriale finitamente generato V possiede sempre una base ed ogni base di V ha lo stesso numero di elementi, che chiameremo *dimensione* dello spazio vettoriale V.

Teorema 4.2.5 (Senza dimostrazione) *In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V sia $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti e sia $G = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ un insieme di generatori, con $p, k \in \mathbb{N}$. Allora $k \leq p$, cioè la cardinalità di un insieme di generatori è sempre maggiore della cardinalità di un insieme di vettori linearmente indipendenti o uguale ad essa.*

La principale conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario:

Corollario 4.2.6 *Ogni base di uno spazio vettoriale ha la medesima cardinalità, cioè lo stesso numero di elementi.*

Dimostrazione. I vettori di una base sono nello stesso tempo linearmente indipendenti e generatori, pertanto se $B_1 = \{c_1, c_2, \ldots, c_l\}$ e $B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ sono due basi di uno spazio vettoriale V, con $l, m \in \mathbb{N}$, allora $l \leq m$ se si pensano $c_1, c_2 \ldots, c_l$ come vettori linearmente indipendenti e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ come generatori e $m \leq l$ se si pensano $b_1, b_2, \ldots, b_m$ come linearmente indipendenti e $c_1, c_2 \ldots, c_l$ come generatori. Quindi $l = m$. **C.V.D.**

Questo corollario ci permette di introdurre la seguente definizione:

Definizione 4.2.7 *Si dice* **dimensione di uno spazio vettoriale** *la cardinalità (i.e. il numero di elementi) di una sua qualunque base. Convenzionalmente poniamo la dimensione dello spazio vettoriale banale uguale a 0.*

Teorema 4.2.8 *Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette (almeno) una base. Più precisamente:*

1. *ogni insieme di generatori contiene almeno una base dello spazio;*
2. *ogni insieme di vettori linearmente indipendenti si può completare ad una base.*

Dimostrazione. Per quanto visto, dato un insieme di generatori di uno spazio vettoriale, si può estrarre da questo insieme una base: se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti allora sono loro stessi una base; se invece sono linearmente dipendenti per la Proposizione 4.2.2 posso toglierne qualcuno e mantenere il fatto che siano dei generatori. Continuando finché non è più possibile eliminare vettori si ottiene un insieme di generatori linearmente indipendenti, quindi una base.

Analogamente in uno spazio vettoriale V ogni insieme di vettori linearmente indipendenti $u_1, \ldots, u_s$ si può considerare parte di una base: infatti si hanno due possibilità: o $\langle u_1, \ldots, u_s \rangle = V$ e allora $u_1, \ldots, u_s$ sono pure generatori e quindi una base di V, oppure $\langle u_1, \dots, u_s \rangle$ è contenuto propriamente in V, e dunque esiste $u \in V$, $u \notin \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ e per l'Osservazione 4.2.3 $u_1, \dots, u_s, u$ sono linearmente indipendenti. Così $\langle u_1, \dots, u_s \rangle \subset \langle u_1, \dots, u_s, u \rangle$. Continuando in questo modo si ottiene una base di V nel momento in cui si ha un numero di vettori linearmente indipendenti uguale alla dimensione di V. Diremo allora che ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di V si può completare in una base di V.

Esempi 4.2.9

1. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ i vettori $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$. Essi generano ovviamente $\mathbb{R}^2$, infatti per ogni vettore $v = (a, b)$ di $\mathbb{R}^2$ si ha: $v = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$. Inoltre e_1 ed e_2 sono linearmente indipendenti, infatti
$$\alpha e_1 + \beta e_2 = (\alpha, \beta) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 = \beta.$$
Dunque $B = \{e_1, e_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ ha pertanto dimensione due. La base B si dice base canonica di $\mathbb{R}^2$. Si noti che le coordinate di un vettore nella base canonica coincidono con le componenti del vettore.

   Analogamente, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Allora $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, detta base canonica. La dimensione di $\mathbb{R}^n$ è dunque n. Dato il vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ vale: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

2. Se un sottospazio L di uno spazio vettoriale V di dimensione n ha dimensione n allora coincide con lo spazio ambiente V. Infatti se L ha dimensione n allora esso contiene n vettori linearmente indipendenti: tali vettori, dal momento che le operazioni in L sono quelle di V, risultano linearmente indipendenti anche in V e sono quindi una base di V stesso. Dunque lo spazio da essi generato è $L = V$.

Osservazione 4.2.10 Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. V ammette quindi una base e supponiamo che V abbia dimensione $n \geq 1$. Sia $T \leq V$ un sottospazio non banale di V. Allora anche T è finitamente generato ed ha dimensione $n_1 \leq n$. Mostriamo come costruire una base di T. Sia $v_1 \in T$ un vettore non nullo. Vi sono due possibilità: o $\langle v_1 \rangle = T$ e allora v_1 è un insieme di generatori di T linearmente indipendente, cioè una base, oppure $\langle v_1 \rangle$ è contenuto propriamente in T. Allora esiste in T un vettore v_2 che non è combinazione lineare di v_1 e quindi v_1, v_2 sono linearmente indipendenti in T, ma anche in V, poiché le operazioni in T sono indotte dalle operazioni di V. Allora abbiamo ancora due possibilità: $\langle v_1, v_2 \rangle = T$, e allora $\{v_1, v_2\}$ è un insieme di generatori linearmente indipendenti di T e quindi una sua base, oppure $\langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq T$ e possiamo continuare il ragionamento. Il procedimento deve avere una fine poiché i vettori linearmente indipendenti in T sono linearmente indipendenti anche in V, e quindi sono al più n.

Definizione 4.2.11 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base di V. Allora per ogni vettore $v \in V$ sono univocamente determinati gli scalari $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tali che $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$; la n-upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si dice n-upla delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Per indicare che $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è la n-upla di coordinate del vettore v rispetto alla base $\mathcal{B}$, scriveremo $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$. Possiamo allora definire l'applicazione

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

che associa ad ogni vettore $v \in V$ la n-upla delle sue coordinate nella base $\mathcal{B}$:

$$f(v) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

L'applicazione f è ben definita perché $\mathcal{B}$ è una base; è iniettiva, infatti se due vettori hanno le stesse coordinate in una base fissata vuol dire che essi coincidono. Inoltre f è suriettiva, infatti, preso un qualsiasi elemento $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ e posto $w = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \dots + \sigma_n u_n$, w è un elemento di V e $f(w) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. L'applicazione f è dunque biunivoca.

Esempio 4.2.12 Consideriamo l'insieme $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$. Si verifichi per esercizio che L è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Vogliamo determinare una base di L. Essendo un sottospazio di uno spazio di dimensione 3, L potrà avere dimensione: 0,1,2,3. Esso non ha dimensione 3 perché allora coinciderebbe con $\mathbb{R}^3$ ma, ad esempio, il vettore $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ non appartiene a L dal momento che le sue coordinate non soddisfano l'equazione di L. Del resto L non è banale poiché contiene almeno il vettore $(1, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$. Dunque L avrà dimensione 1 o 2. Abbiamo già notato che $(1, 2, 0)$ è un vettore di L. Osserviamo che $(0, 1, 1)$ è un altro vettore che appartiene a L. Dal momento che $(1, 2, 0)$ e $(0, 1, 1)$ sono linearmente indipendenti, $\dim L = 2$ e $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ è una base di L.

Osserviamo che, sebbene abbiamo costruito una funzione biiettiva tra ogni spazio vettoriale di dimensione n e $\mathbb{R}^n$, abbiamo definito una base "canonica" solo per $\mathbb{R}^n$.

Esempio 4.2.13 Determiniamo una base dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×3 ad entrate reali. Consideriamo allora le seguenti matrici:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23} sono linearmente indipendenti: ognuna ha una entrata diversa da zero in una posizione in cui tutte le altre matrici hanno una entrata nulla. Inoltre ogni matrice di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + a_{13}e_{13} + a_{21}e_{21} + a_{22}e_{22} + a_{23}e_{23}$$

quindi e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23} generano $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. La dimensione di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ è pertanto 6. Analogamente si può dimostrare, in generale, che la dimensione di $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ è nm e che una base di $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ è data dall'insieme delle matrici $\{e_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ dove e_{ij} è la matrice avente tutte le entrate nulle tranne quella di posto i, j che è uguale a 1.

4.3 Strumenti di calcolo

Cocentriamoci ora sulla seguente domanda: dati k vettori $v_1, \dots, v_k$ di uno spazio vettoriale V, come facciamo a stabilire se questi sono o meno linearmente indipendenti? Si può rispondere a questa domanda utilizzando diversi metodi:

Metodo 1 Possiamo certamente utilizzare la definizione e cercare quindi di stabilire se è possibile scrivere $\mathbf{0}_V$ come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ con qualche coefficiente diverso da 0. Abbiamo utilizzato questo metodo nell'Esempio 4.1.2(2.). Vediamo un altro esempio:

Esempio 4.3.1 Stabilire se i vettori $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (3, 3, -1, 1)$, $v_4 = (-3, 0, 2, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

Usando il Metodo 1, dobbiamo scrivere il vettore $(0,0,0,0)$ come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3, v_4:

$$a(1,2,0,1)+b(-1,1,1,1)+c(3,3,-1,1)+d(-3,0,2,1)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(a-b+3c-3d, 2a+b+3c, b-c+2d, a+b+c+d)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-b+3c-3d=0 \\ 2a+b+3c=0 \\ b-c+2d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$

Abbiamo dunque trovato un sistema lineare omogeneo nelle quattro incognite a,b,c,d. Per risolvere il sistema lineare trovato costruiamo la matrice completa associata al sistema e riduciamola a scala:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La matrice incompleta ridotta a scala ha rango 2 (uguale al rango della matrice completa), pertanto il sistema ha infinite soluzioni. Questo significa che esistono infinite quaterne (a,b,c,d) di coefficienti tali che $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}=av_1+bv_2+cv_3+dv_4$. Perciò i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti. (Al contrario, se il sistema trovato avesse avuto l'unica soluzione $(0,0,0,0)$, allora i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sarebbero stati linearmente indipendenti).

Metodo 2 Abbiamo notato nella Osservazione 4.1.5 che se i vettori $v_1,\dots,v_k$ sono linearmente indipendenti allora qualsiasi sottoinsieme di $\{v_1,\dots,v_k\}$ continua ad essere formato da vettori linearmente indipendenti. Per stabilire dunque se certi vettori assegnati $v_1,\dots,v_k$ sono linearmente indipendenti si può procedere nel modo seguente:

(1) consideriamo il vettore v_1: questo è linearmente indipendente se e solo se è non nullo. Dunque se $v_1=\mathbf{0}_V$ allora i vettori assegnati sono linearmente dipendenti. Se, invece, $v_1\neq\mathbf{0}_V$ allora passiamo al punto (2);

(2) consideriamo i vettori $\{v_1,v_2\}$ e ci chiediamo se v_2 è linearmente dipendente da v_1 cioè se v_2 è un multiplo di v_1. In caso affermativo possiamo concludere che i vettori assegnati sono linearmente dipendenti. Se, invece, $v_2\neq\alpha v_1$ per qualsiasi $\alpha\in\mathbb{R}$, allora passiamo al punto (3);

(3) consideriamo i vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ e ci chiediamo se v_3 è linearmente dipendente da v_1 e v_2 cioè se v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2. In caso affermativo possiamo concludere che i vettori assegnati sono linearmente dipendenti. Se, invece, $v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$, allora andiamo avanti e procediamo in modo analogo fino ad aver analizzato uno dopo l'altro tutti i sottoinsiemi $\{v_1, \ldots, v_i\}$ per $i = 1, \ldots, k$.

Esempio 4.3.2 Stabilire se i vettori $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (3, 3, -1, 1)$, $v_4 = (-3, 0, 2, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Utilizziamo questa volta il Metodo 2 per stabilire la lineare dipendenza dei vettori $v_1, \ldots, v_4$. Il vettore v_1 è non nullo, quindi linearmente indipendente. Il vettore v_2 non è un multiplo del vettore v_1 (ad esempio perché la sua terza coordinata è non nulla mentre la terza coordinata di v_1 è nulla), quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Ora devo stabilire se v_3 è combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2, cioè se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Scriviamo per esteso la relazione appena scritta:

$$(3, 3, -1, 1) = \alpha(1, 2, 0, 1) + \beta(-1, 1, 1, 1) \Longrightarrow$$

$$(3, 3, -1, 1) = (\alpha - \beta, 2\alpha + \beta, \beta, \alpha + \beta) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ 2\alpha + \beta = 3 \\ \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Si vede facilmente che il sistema trovato ha soluzione $\beta = -1, \alpha = 2$. Questo significa che possiamo scrivere il vettore v_3 come combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2, pertanto i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Di conseguenza anche i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti.

I Metodi 1 e 2 appena illustrati sono più o meno equivalenti da un punto di vista dei calcoli ed entrambi piuttosto laboriosi quando i vettori assegnati sono molti e/o dipendenti da parametri. Esiste in effetti un metodo decisamente più efficace dei precedenti per stabilire se certi vettori sono o meno linearmente indipendenti. Per illustrare questo terzo metodo abbiamo però bisogno di introdurre una nuova definizione e di riflettere su di essa.

Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ possiamo leggere le righe di A come vettori di $\mathbb{R}^n$ e le sue colonne come vettori di $\mathbb{R}^m$. Questo è il punto di vista adottato nella seguente definizione:

Definizione 4.3.3 *Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si chiama rango righe di A il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A (come vettori di $\mathbb{R}^n$); si chiama rango colonne di A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A (come vettori di $\mathbb{R}^m$).*

Il rango righe ed il rango colonne di una matrice non sono indipendenti, al contrario, il legame tra questi due numeri è forte ed espresso dal seguente teorema che NON dimostreremo:

Teorema 4.3.4 *Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, il rango righe ed il rango colonne di A coincidono.*

Ha senso dunque assegnare al rango righe e al rango colonne un unico nome. Chiameremo semplicemente *rango* di A sia il rango righe che il rango colonne di A e lo indicheremo con $rg(A)$.

Osservazione 4.3.5 Nella Lezione 1 abbiamo definito il rango di una matrice in forma a scala per righe. Naturalmente la definizione di rango (Definizione 1.1.4) data per le matrici a scala coincide con quella più generale appena fornita. È facile infatti mostrare che in una matrice a scala le righe non nulle sono linearmente indipendenti: basta usare il Metodo 2 partendo dall'ultima riga non nulla e risalendo verso l'alto nella matrice. Ad esempio, consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è in forma a scala con 3 pivot (1, -5, -2) e ha pertanto rango 3. Mostriamo che i vettori riga $(0,0,0,-2), (0,0,-5,3), (1,2,3,-1)$ sono linearmente indipendenti: il vettore $(0,0,0,-2)$ è non nullo e il vettore $(0,0,-5,3)$ non è un multiplo di $(0,0,0,-2)$ perché la sua terza coordinata è -5 mentre la terza coordinata di $(0,0,0,-2)$ è nulla. Infine il vettore $(1,2,3,-1)$ non è combinazione lineare di $(0,0,0,-2)$ e $(0,0,-5,3)$ perché la sua prima coordinata è 1 mentre la prima coordinata di $(0,0,0,-2)$ e $(0,0,-5,3)$ è nulla.

Osservazione 4.3.6 Il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ fornisce, per definizione, la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A e la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

Proposizione 4.3.7 *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Le operazioni elementari sulle righe di A preservano il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A quindi preservano il rango.*

Dimostrazione Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ed indichiamo con $v_1, \dots, v_m$ le sue righe, pensate come vettori di $\mathbb{R}^n$. Vogliamo mostrare che le operazioni elementari sulle righe della matrice non modificano il sottospazio $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Ora, scambiare due righe di A certamente non cambia questo sottospazio. Analogamente sostituire ad una riga v_i un suo multiplo non nullo preserva il sottospazio, vale a dire:

$$\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_m \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Infatti un vettore genera tutto e solo ciò che è generato da qualsiasi suo multiplo non nullo. Si tratta infine di dimostrare che sostituendo alla riga i-esima la somma della riga i-esima con un multiplo della j-esima, ancora lo spazio generato dalle righe non cambia. Poiché questa operazione coinvolge solo la i-esima e la j-esima riga, si tratta di dimostrare che, per $i \neq j$,

$$\langle v_j, v_i \rangle = \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle.$$

Naturalmente

$$\langle v_j, v_i \rangle \supseteq \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle,$$

infatti ogni elemento di $\langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$ è della forma $av_j + b(v_i + \alpha v_j) = (a+b\alpha)v_j + bv_i$, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$, e quindi è una combinazione lineare di v_i e v_j, cioè appartiene a $\langle v_j, v_i \rangle$. Viceversa, dato un elemento $hv_i + kv_j \in \langle v_j, v_i \rangle$ con $h, k \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere $hv_i + kv_j = h(v_i + \alpha v_j) + (k - h\alpha)v_j$ che è una combinazione lineare di $v_i + \alpha v_j$ e v_j e quindi appartiene a $\langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$. Abbiamo dunque mostrato che $\langle v_j, v_i \rangle \subseteq \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$, quindi $\langle v_j, v_i \rangle = \langle v_j, v_i + \alpha v_j \rangle$. □

Siamo ora pronti per illustrare il terzo metodo per stabilire se certi vettori assegnati $\{v_1, \dots, v_k\}$ sono o meno linearmente indipendenti:

Metodo 3. Si costruisce la matrice A che ha i vettori $v_1, \dots, v_k$ come righe. Il rango di A fornisce, per definizione, il numero di vettori linearmente indipendenti tra $v_1, \dots, v_k$. Per calcolare tale rango, grazie alla Proposizione 4.3.7, si riduce la matrice A in forma a scala attraverso l'algoritmo di Gauss e si calcola il rango della matrice ridotta. Notiamo anche che, sempre per la Proposizione 4.3.7, lo spazio generato dalle righe di A coincide con lo spazio generato dalle righe della matrice ridotta, proprietà, questa, che in generale può rivelarsi molto utile.

Esempio 4.3.8 Stabilire se i vettori $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (3, 3, -1, 1)$, $v_4 = (-3, 0, 2, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Utilizziamo infine il Metodo 3 per stabilire la lineare dipendenza dei vettori $v_1, \dots, v_4$. Si tratta di ridurre in forma a scala la matrice che ha sulle righe i vettori $v_1, \dots, v_4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Si ha dunque: $rg(A) = rg(A') = 2$ il che significa che solo due tra i vettori $v_1, \dots, v_4$ sono linearmente indipendenti. Perciò i vettori $v_1, \dots, v_4$ sono linearmente dipendenti. Sappiamo, inoltre, che $\langle v_1, \dots, v_4 \rangle = \langle (1, 2, 0, 1), (0, 3, 1, 2) \rangle$.

Per meglio illustrare l'efficacia del Metodo 3, facciamo ancora un altro esempio:

Esempio 4.3.9 Stabilire per quali valori del parametro reale k i vettori $(1, k, 1)$, $(k, 1, -k)$, $(k, k, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Per rispondere a questo quesito basta determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

$$rg \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -k \\ k & k & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Si ha:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -k \\ k & k & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & -2k \\ 0 & k-1 & 1+k \end{pmatrix} \to rg \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k^2+1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ il numero $k^2 + 1$ è positivo, pertanto per ogni $k \neq 1$ il rango della matrice è uguale a 3, cioè, per ogni $k \neq 1$ i vettori assegnati sono linearmente indipendenti. Per $k = 1$, invece, il rango della matrice trovata è uguale a 2, quindi i vettori assegnati sono linearmente dipendenti.

4.4 Esercizi svolti

Esercizio 4.4.1 Si verifichi che $\{(1,2,3),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Dobbiamo verificare che

1) i vettori dati sono linearmente indipendenti;

2) i vettori dati generano $\mathbb{R}^3$.

Per mostrare la lineare indipendenza dobbiamo verificare che, presa una combinazione lineare dei vettori $(1,2,3)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, questa è uguale al vettore nullo se e solo se tutti i coefficienti sono nulli. Sia, dunque, $\alpha(1,2,3) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \gamma) = (0,0,0)$, cioè

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema otteniamo: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dunque i vettori $\{(1,2,3),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ sono linearmente indipendenti. Mostriamo ora che essi generano $\mathbb{R}^3$. Sia (a,b,c) un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ e cerchiamo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che $(a,b,c) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \gamma)$. Otteniamo: $\alpha = a$, $\beta = b - 2a$ $\gamma = c - 3a$.

Esercizio 4.4.2 In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Stabilire se A e B sono linearmente indipendenti. Eventualmente completare l'insieme $\{A, B\}$ in una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Svolgimento. Le matrici A e B sono linearmente indipendenti perché non sono una multipla dell'altra. Completare l'insieme $\{A, B\}$ in una base di

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ significa individuare due elementi $C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $\{A, B, C, D\}$ sia una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Procedendo come indicato in 4.2.3 si verifichi che possiamo scegliere $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.4.3 Dato l'insieme $\{(0, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 3, 4), (2, 1, 0)\}$ di vettori di $\mathbb{R}^3$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(i) Ogni insieme che contiene quello dato genera $\mathbb{R}^3$.

(ii) Esiste un insieme che contiene quello dato ed è costituito da vettori linearmente indipendenti.

(iii) L'insieme dato è una base di $\mathbb{R}^3$.

Estrarre, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ dall'insieme dato.

Svolgimento. Ricordiamo innanzitutto che la dimensione di $\mathbb{R}^3$ è 3 quindi 3 è la cardinalità di ogni base di $\mathbb{R}^3$ e quindi il massimo numero di vettori linearmenti indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Per questo possiamo immediatamente asserire che le affermazioni (ii) e (iii) sono false. Per convincerci ora della veridicità della affermazione (i) basta verificare che i vettori $(0, 1, 1)$, $(1, 0, -1), (2, 3, 4), (2, 1, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$. Per questo basta procedere come nell'esercizio 3.3.1. Infine si può mostrare che l'insieme $\{(0, 1, 1), (1, 0, -1),$ $(2, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.4.4 Sia $W = \{(2s + t, s - t, s + t, s + 2t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

(i) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

(ii) determinare una base $\mathcal{B}$ di W;

(iii) completare $\mathcal{B}$ ad una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento.

(i) Siano $v = (2s+t, s-t, s+t, s+2t)$ e $w = (2r+p, r-p, r+p, r+2p)$, con $s, t, r, p \in \mathbb{R}$, due elementi di W. Allora $v + w$ è ancora un elemento di W, infatti $v+w = (2s+t+2r+p, s-t+r-p, s+t+r+p, s+2t+r+2p) =$ $(2(s + r) + t + p, (s + r) - (t + p), (s + r) + (t + p), (s + r) + 2(t + p))$. Analogamente per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in W$, $\lambda v \in W$. Pertanto W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(ii) Individuiamo innanzitutto un insieme di generatori di W. Per questo osserviamo che ogni vettore di W è della forma $(2s+t, s-t, s+t, s+2t) = s(2,1,1,1) + t(1,-1,1,2)$ il che ci consente di affermare che i vettori $(2,1,1,1)$ e $(1,-1,1,2)$ generano W. D'altra parte i vettori $(2,1,1,1)$, $(1,-1,1,2)$ sono linearmente indipendenti (non sono uno multiplo dell'altro!) e quindi individuano una base di W.

(iii) Indicata con $\mathcal{B} = \{(2,1,1,1), (1,-1,1,2)\}$ la base di W individuata in (ii), per ottenere una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di $\mathbb{R}^4$ possiamo aggiungere alla base $\mathcal{B}$ i vettori $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$. Si verifica infatti facilmente che i vettori $(2,1,1,1), (1,-1,1,2)$, $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$ sono linearmente indipendenti. Dal momento che $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ questo basta per concludere che essi individuano una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4.4.5 Sia $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado minore o uguale a 3.

(i) Mostrare che l'insieme dei monomi $\{1, x, x^2, x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Dedurre che la dimensione di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ è 4.

(ii) I vettori $2x^2+1$, $2x+1$, x^3 sono linearmente indipendenti? Completare, se possibile, l'insieme $\{2x^2+1, 2x+1, x^3\}$ in una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

(iii) Esistono basi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ costituite da polinomi di grado 3? In caso affermativo esibire un esempio.

(iv) Esistono basi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ costituite da polinomi di grado minore o uguale a 2? In caso affermativo esibire un esempio.

Svolgimento.

(i) Un generico elemento di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ è un polinomio $p(x)$ della forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$. Dunque $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Del resto una combinazione lineare $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ di $1, x, x^2, x^3$ è uguale al polinomio nullo se e solo se tutti i coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 sono nulli. Questo dimostra che i vettori $1, x, x^2, x^3$ sono linearmente indipendenti e quindi individuano una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. La dimensione di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ è pertanto uguale a 4.

(ii) Sia ora $\alpha(2x^2+1)+\beta(2x+1)+\gamma x^3 = 0$, cioè $\alpha+\beta+2\beta x+2\alpha x^2+\gamma x^3 = 0$. Allora, necessariamente, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pertanto i vettori $2x^2 + 1$, $2x + 1$, x^3 sono linearmente indipendenti. Per completare l'insieme $S = \{2x^2 + 1, 2x + 1, x^3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ basta allora aggiungere all'insieme S un polinomio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ che non sia una combinazione lineare di $2x^2 + 1$, $2x + 1$, x^3, ad esempio il polinomio 1 (verificare!). Così l'insieme $\{1, 2x^2 + 1, 2x + 1, x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

(iii) L'insieme $X = \{x^3, x^3 + x^2, x^3 + x, x^3 + 1\}$ è un esempio di una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ costituita da polinomi di grado 3. Per rendersi conto che si tratta di una base basta osservare che gli elementi della base $\mathcal{B}$ di (i) si ottengono facilmente come combinazione lineare degli elementi di X. Dunque l'insieme X genera $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Dal momento che X ha 4 elementi e che $\dim(\mathbb{R}^{\leq 3}[x]) = 4$, X è una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$.

(iv) Non esiste una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ costituita da polinomi di grado minore o uguale a 2. Infatti combinando linearmente polinomi di grado minore o uguale a 2 non è possibile ottenere polinomi di grado 3.

Esercizio 4.4.6 Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (2, 1, 0, 3)$, $v_2 = (-5, 3, 4, 0)$, $v_3 = (-1, -1, 0, 2)$, $v_4 = (3, 2, 0, 1)$.

Svolgimento. I vettori v_1 e v_2 sono certo linearmente indipendenti dal momento che non sono uno multiplo dell'altro. Il vettore v_3 è combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2? Esistono, cioè, α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che $(-1, -1, 0, 2) = \alpha(2, 1, 0, 3) + \beta(-5, 3, 4, 0)$? Si tratta di stabilire se esistono α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} -1 = 2\alpha - 5\beta \\ -1 = \alpha + 3\beta \\ 0 = 4\beta \\ 2 = 3\alpha \end{cases}.$$

Il sistema individuato non ha soluzioni ($\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = 0,\ \alpha = -1!$), quindi i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Resta, infine, da stabilire se v_4 è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3. Si vede facilmente che $v_4 = v_1 - v_3$. Dunque $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, pertanto $\dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = 3$.

Esercizio 4.4.7 Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ definito da $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_2 - 2x_5 = 0,\ x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$. Si determini una base $\mathcal{B}$ di W e si calcolino le coordinate del vettore $v = (-4, 0, 1, 1, -2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che il nostro spazio W non è tutto lo spazio vettoriale ambiente poiché, ad esempio, il vettore $(0, 0, 0, 0, 1)$ non soddisfa le due equazioni. Non è neanche lo spazio nullo, poiché il vettore $(1, 1, 0, 0, 0)$ appartiene a W. Studiamo le due equazioni che lo caratterizzano: dalla prima otteniamo che $x_1 = x_2+2x_5$, dalla seconda $x_3 = -x_4-x_5$, si vede quindi che scegliendo in modo indipendente x_2, x_4, x_5, possiamo calcolare di conseguenza x_1 e x_3 per ottenere una 5-upla in W. Se scegliamo $x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ otteniamo il vettore $v_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$; se scegliamo $x_2 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ otteniamo il vettore $v_2 = (0, 0, -1, 1, 0)$; se scegliamo $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$ otteniamo il vettore $v_3 = (2, 0, -1, 0, 1)$. I vettori v_1, v_2, v_3 sono tre vettori di W e sono linearmente indipendenti:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^5} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + 2\gamma, \alpha, -\beta - \gamma, \beta, \gamma) = 0_{\mathbb{R}^5}$$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$

Quindi W può avere dimensione 3 o 4. Per determinare una base di W osserviamo che gli elementi di W sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^5$ della forma $(x_2 + 2x_5, x_2, -x_4 - x_5, x_4, x_5)$. Ciascuno di questi vettori è esprimibile nel modo seguente:

$$(x_2 + 2x_5, x_2, -x_4 - x_5, x_4, x_5) = x_2(1, 1, 0, 0, 0)+$$

$$+x_5(2, 0, -1, 0, 1) + x_4(0, 0, -1, 1, 0).$$

Pertanto i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, -1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 0, -1, 0, 1)$ generano W. Abbiamo così individuato una base di W: $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. In particolare W ha dimensione 3.

Per calcolare le coordinate del vettore $v = (-4, 0, 1, 1, -2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ dobbiamo determinare α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, cioè $(-4, 0, 1, 1, -2) = (\alpha + 2\gamma, \alpha, -\beta - \gamma, \beta, \gamma)$. Otteniamo:

$$\beta = 1, \quad \gamma = -2, \quad \alpha = 0.$$

Pertanto $v = (0, -2, 1)_{\mathcal{B}}$.

4.5 Esercizi proposti

Esercizio 4.5.1 Costruire una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ diversa dalla base canonica e scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 4.5.2 Determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1. le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 0, 0)$;
2. i vettori v_1, v_2 generano il sottospazio S di $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$;
3. le coordinate del vettore $(1, 0, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 0, 1)$.

La base $\mathcal{B}$ richiesta è unica?

Esercizio 4.5.3 Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$, $v_4 = (2, 3, 1)$.

1. Stabilire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti.
2. Stabilire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 generano $\mathbb{R}^3$.
3. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4.
4. Completare la base trovata in 3. in una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.5.4 Sia

$$S = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a + b + d = 0,\ d + f + c = 0 \right\}.$$

1. Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2. Determinare una base di S.
3. Determinare un sottospazio T di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tale che $S + T = \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 4.5.5 Nell'insieme $V = \mathbb{R}[x, y]$ dei polinomi a coefficienti reali nelle variabili x e y, con le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale, si consideri il sottoinsieme S dei polinomi di grado minore o uguale a 2.

1. Dopo aver verificato che V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e che S è un suo sottospazio, calcolare la dimensione di S ed esibire una sua base $\mathcal{B}$.

2. Calcolare le coordinate del polinomio $x + y - x^2$ nella base $\mathcal{B}$.

3. Mostrare che i polinomi $x - y$, $1 + x - y$, $1 - xy$ sono linearmente indipendenti.

4. Completare l'insieme $\{x - y, 1 + x - y, 1 - xy\}$ in una base di V.

Lezione 5

Gli spazi affini

In questa lezione vogliamo dare una interpretazione geometrica ai risultati illustrati nelle precedenti lezioni e completare la costruzione di un modello algebrico per uno spazio di dimensione qualsiasi.

5.1 Lo spazio affine n-dimensionale $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$

Cominciamo con qualche considerazione su un paio di esempi:

Esempio 5.1.1 Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

come abbiamo imparato a fare nella Lezione 1. La matrice completa associata al sistema è

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Per le Proposizioni 1.1.10 e 4.3.7, il sistema lineare assegnato ha soluzioni se e solo se $rg(A) = rg(A|\underline{b})$. Riduciamo la matrice in forma a scala per determinare le soluzioni del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Si ha dunque $rgA = rg(A|\underline{b}) = 2$, pertanto il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da una variabile. Il sistema di partenza è equivalente al sistema lineare associato alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=1 \end{cases}$$

che può essere risolto per sostituzioni successive dal basso: $z = 1+2y$, $x = 1-y-z = 1-y-1-2y = -3y$. L'insieme delle soluzioni è pertanto:

$$S = \{(-3y, y, 1+2y) \in \mathbb{R}^3\} = (0,0,1) + \langle(-3,1,2)\rangle.$$

Con la somma $(0,0,1) + \langle(-3,1,2)\rangle$ intendiamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ costituito dai vettori che si scrivono come somma del vettore $(0,0,1)$ e di un qualsiasi multiplo del vettore $(-3,1,2)$, quindi esattamente ogni elemento di S.

Notiamo che il sottospazio $\langle(-3,1,2)\rangle$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato al sistema da cui siamo partiti:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$

Esempio 5.1.2 Cosa succede se risolviamo semplicemente l'equazione

$$x+y+z=1?$$

In tal caso possiamo usare l'equazione assegnata per esprimere una incognita in funzione delle altre due: $z = 1-x-y$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione assegnata dipende dunque da due variabili libere ed è:

$$T = \{(x, y, 1-x-y) \in \mathbb{R}^3\} = (0,0,1) + \langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle.$$

Anche in questo caso abbiamo indicato con $(0,0,1)+\langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$ la somma del vettore $(0,0,1)$ e di qualunque vettore appartenente al sottospazio $\langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$. Notiamo che il sottospazio $\langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di partenza:

$$x+y+z=0.$$

In ciascuno degli esempi appena fatti abbiamo descritto l'insieme delle soluzioni del sistema lineare assegnato come la 'somma' di un vettore fissato e di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Qual è l'ambiente giusto per leggere ed interpretare geometricamente i risultati ottenuti?

Definizione 5.1.3 *Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare in cui $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = k$. Diremo in tal caso che il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha rango k.*

Definizione 5.1.4 *Lo spazio affine n-dimensionale $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ è il dato di:*

- *un insieme di punti X che identificheremo con $\mathbb{R}^n$;*

- *lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$;*

- *un'azione di $\mathbb{R}^n$ su X cioè una funzione:*

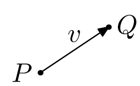
$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & X \\ (P, v) & \longmapsto & Q = P + v, \end{array}$$

  essendo $Q = P + v$ il punto che si raggiunge applicando il vettore v nel punto P.

In altre parole, dati un punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ed un vettore $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, associamo ad essi un punto Q, indicato con $P + v$, secondo la seguente legge:

$$Q = P + v = (x_1, \ldots, x_n) + (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_n + \alpha_n).$$

Attenzione! La somma che abbiamo scritto è in effetti una strana somma: è la somma di un punto e di un vettore e produce un punto. Schematizzando con un disegno:



Vediamo alcune proprietà di questa legge.

i) Presi due punti P e Q in X esiste un unico vettore $v \in \mathbb{R}^n$ tale che sia $P + v = Q$. Indicheremo il vettore v con $Q - P$. (Attenzione: questa è solo una scrittura e indica un vettore di $\mathbb{R}^n$). Possiamo determinare il vettore $Q - P$ esplicitamente: se $P = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Q = (y_1, \ldots, y_n)$, allora $Q - P = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$ (ed è evidente che $Q - P$ è il vettore che sommato a P dà Q). Nello stesso modo $P - Q = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ è il vettore che sommato a Q dà P.
Esempio: in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ siano $P = (2, -1)$, $Q = (3, 2)$, allora $P - Q = (-1, -3)$. Infatti $Q + (P - Q) = (3, 2) + (-1, -3) = (2, -1) = P$.

ii) Se si ha $P + v = P + w$ allora $v = w$. In particolare il solo vettore che sommato a P lo lascia invariato è il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$.

Le proprietà *i)* e *ii)* evidenziano il fatto che, fissato un punto $L \in X$, possiamo definire una applicazione che ad ogni punto $Q \in X$ associa il vettore $Q - L$:

$$\begin{array}{rccl} \alpha_L : & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & Q & \longmapsto & \alpha_L(Q) = Q - L. \end{array}$$

Questa funzione è una biiezione.

iii) Se prendiamo due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ e un punto $P \in X$ allora $P + v$ è un punto di X a cui possiamo sommare un altro vettore w: otteniamo il punto $(P + v) + w$. Tale punto, come risulta evidente da una scrittura in coordinate, coincide con il punto che si ottiene sommando a P il vettore $v +_{\mathbb{R}^n} w$.

Definizione 5.1.5 *Chiameremo $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ piano affine e $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ spazio affine tridimensionale.*

Così come studiando gli spazi vettoriali abbiamo introdotto dei sottooggetti (i sottospazi vettoriali), ora definiremo i sottooggetti dello spazio affine: i cosiddetti **sottospazi affini** che chiameremo anche **sottovarietà lineari**.

Definizione 5.1.6 *Una* **sottovarietà lineare** *L di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ è l'insieme*

$$\{P + v \mid v \in W\}$$

dove P è un punto fissato di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ e W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Il sottospazio W si dice **giacitura o spazio direttore** *della sottovarietà lineare L. La dimensione di W viene detta dimensione della sottovarietà lineare. Un punto è dunque una sottovarietà lineare di dimensione zero. Chiameremo retta una sottovarietà lineare di dimensione uno, piano una sottovarietà lineare di dimensione due.*

5.1.1 Sottovarietà lineari del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Sia $L = P + W$ una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dove P è un punto fissato della sottovarietà e W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Quale può essere la dimensione di W? Essendo $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, W può avere dimensione 0, 1 oppure 2. Se $\dim W = 0$, allora $L = P$ è un punto. Se $\dim W = 2$ allora $L = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Resta da studiare il caso in cui L sia una sottovarietà lineare di dimensione uno, cioè una retta. Consideriamo dunque la retta r passante per il punto $P = (x_0, y_0)$, avente giacitura generata dal vettore $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq (0, 0)$:

$$r : P + \langle v \rangle = (x_0, y_0) + \langle (a, b) \rangle.$$

I punti di r sono tutti e soli della forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \tag{5.1}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Le equazioni (5.1) si dicono *equazioni parametriche* della retta r. Al variare del parametro reale λ esse forniscono le coordinate di tutti e soli i punti di r.

Supponiamo $a \neq 0 \neq b$ ed eliminiamo il parametro dalle equazioni (5.1):

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a \\ y - y_0 = \lambda b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(x - x_0) = \lambda ab \\ a(y - y_0) = \lambda ab \end{cases} \Leftrightarrow b(x - x_0) = a(y - y_0).$$

La retta r può dunque essere descritta mediante l'equazione lineare

$$bx - ay = bx_0 - ay_0. \tag{5.2}$$

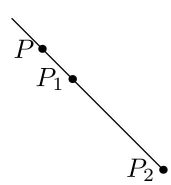
Notiamo che se $a = 0$ allora $b \neq 0$ perché, per ipotesi, $(a, b) \neq 0$. In tal caso l'equazione (5.2) è equivalente all'equazione $x = x_0$ che descrive la retta r nel caso in cui sia $a = 0$. Analogamente se $b = 0$, allora $a \neq 0$ e l'equazione di r diventa semplicemente $y = y_0$.

L'equazione (5.2) si chiama *equazione cartesiana* della retta r. Osserviamo che essa è ovviamente soddisfatta dalle coordinate del punto $P = (x_0, y_0)$, che è un punto della retta, e che l'equazione omogenea ad essa associata:

$$bx - ay = 0$$

è l'equazione del sottospazio direttore $\langle (a, b) \rangle$ di r.

Esempio 5.1.7 In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ consideriamo la retta t passante per il punto $P = (1, 4)$, avente spazio direttore $V = \langle (1, -1) \rangle$. I punti di t sono tutti e soli della forma $(1, 4) + v$, dove $v \in V$. Dal momento che i vettori di V sono i multipli di $(1, -1)$, i punti $(1, 4) + (1, -1) = (2, 3) = P_1$ e $(1, 4) + (4, -4) = (5, 0) = P_2$ appartengono alla retta.



Determiniamo ora equazioni parametriche e cartesiane della retta t: le sue equazioni cartesiane sono:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Ricaviamo il parametro λ dalla prima equazione: $\lambda = x - 1$ e sostituiamolo nella seconda equazione. Otteniamo così l'equazione lineare $y = 5 - x$ che è l'equazione cartesiana della retta t.

Naturalmente ogni equazione lineare equivalente a quella trovata descrive la stessa retta, cioè l'equazione di una retta è individuata a meno di un multiplo dei suoi coefficienti.

Notiamo che lo spazio direttore della retta t, cioè il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ $\langle(1, -1)\rangle$, è l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea associata all'equazione trovata: $x + y = 0$. Scopriremo più avanti come questo non sia un caso fortuito.

Esercizio 5.1.8 Determinare l'equazione cartesiana della retta r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ che passa per i due punti $P_1 = (1, 3)$ e $P_2 = (3, -1)$.

La retta r passa per il punto P_1 e ha giacitura generata dal vettore $P_2 - P_1 = (2, -4)$: $r : (1, 3) + \langle(2, -4)\rangle = (1, 3) + \langle(1, -2)\rangle$. Le equazioni cartesiane di r sono dunque:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda. \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Dalla prima equazione otteniamo $\lambda = x - 1$ che, sostituito nella seconda equazione, dà: $y = 5 - 2x$. L'equazione cartesiana della retta r è quindi $2x + y - 5 = 0$.

Definizione 5.1.9 *Due sottovarietà lineari $L_1 = P + V_1$ e $L_2 = Q + V_2$ di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ si dicono* **parallele** *se uno dei due spazi direttori è contenuto nell'altro (i.e. se $V_1 \leq V_2$ oppure $V_2 \leq V_1$).*

Si osservi che questa definizione di parallelismo risulta un po' diversa dalle solite definizioni intuitive. Ad esempio, secondo la definizione 5.1.9, un punto è parallelo a qualsiasi sottovarietà lineare dal momento che il suo spazio direttore è banale. Due sottovarietà lineari della stessa dimensione, invece, sono parallele se e solo se hanno lo stesso spazio direttore. In particolare due sottovarietà coincidenti sono parallele.

Esercizio 5.1.10 *La mutua posizione di due rette nel piano.* Utilizziamo ora la teoria dei sistemi lineari per studiare la posizione reciproca di due rette nel piano. Consideriamo dunque le rette $r_1 : a_1x_1+b_1x_2 = c_1$ e $r_2 : a_2x_1+b_2x_2 = c_2$ con $(a_1, b_1) \neq (0\,,0)$ e $(a_2, b_2) \neq (0\,,0)$. Gli eventuali punti di intersezione fra le due rette sono punti le cui coordinate soddisfano contemporaneamente le equazioni di r_1 e r_2 cioè il sistema:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2, \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che rg $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \geq 1$ dal momento che ciascuna delle due righe della matrice è diversa dalla riga nulla! (N.B. Affinché una matrice abbia rango maggiore di uno basta che abbia una entrata diversa da zero). Indichiamo il nostro sistema con $A\underline{x} = \underline{c}$. Analizziamo i casi possibili:

- rg$A = 1$: in questo caso la seconda riga di A è combinazione lineare della prima, quindi l'equazione dello spazio direttore della seconda retta è un multiplo scalare dell'equazione dello spazio direttore della prima. Questo significa che le due rette hanno il medesimo spazio direttore e sono quindi parallele. Adesso guardiamo il sistema totale. Se la matrice completa ha rango 2, il sistema non ha soluzioni ($rg(A) \neq rg(A|\underline{b})$). Le due rette sono parallele e non hanno punti in comune. Se la matrice completa ha rango 1 il sistema ha infinite soluzioni e queste soluzioni dipendono da una sola variabile. L'insieme delle soluzioni è della forma: $P + \langle v \rangle$. Questo significa che l'insieme dei punti comuni alle due rette è una retta e questa coincide necessariamente con ciascuna delle rette date: le due rette coincidono. Il fatto che la matrice completa abbia rango 1 ci assicura che le equazioni delle due rette siano proporzionali.

- rg$A = 2$: in questo caso la matrice completa, che è una matrice 2×3, ha necessariamente rango 2: il suo rango è infatti sempre maggiore del rango della matrice incompleta o uguale ad esso ma è minore o uguale a due. Quindi il sistema ha una ed una sola soluzione. Questo significa che le due rette si intersecano in un punto. Diremo in questo caso che le rette sono *incidenti*.

5.2 Lo spazio affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

Studiamo ora le sottovarietà lineari $L = P + T$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, con P punto dello spazio affine e $T \leq \mathbb{R}^3$. Essendo T un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, esso può avere dimensione 0, 1, 2 oppure 3. Se $\dim T = 0$ la varietà sarà costituita da un solo punto e se $\dim T = 3$ essa coinciderà con tutto lo spazio affine. Come possiamo descrivere rette e piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$?

5.2.1 *I piani in* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. In questo caso T ha dimensione due e quindi è generato da due vettori linearmente indipendenti. I punti del piano π : $(x_0, y_0, z_0) + \langle (m_1, n_1, t_1), (m_2, n_2, t_2) \rangle$, dove i vettori (m_1, n_1, t_1) e (m_2, n_2, t_2) sono linearmente indipendenti, possono essere descritti mediante le seguenti equazioni dipendenti dai parametri reali λ e μ:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda m_1 + \mu m_2 \\ y = y_0 + \lambda n_1 + \mu n_2 \\ z = z_0 + \lambda t_1 + \mu t_2. \end{cases} \tag{5.3}$$

Le equazioni (5.3) si dicono *equazioni parametriche* del piano π. Possiamo utilizzare due delle equazioni (5.3) per esprimere ciascuno dei parametri λ e μ in funzione delle variabili. Sostituendo tali espressioni di λ e μ nella terza equazione si ottiene la cosiddetta *equazione cartesiana* del piano π, vale a dire una equazione lineare nelle incognite x,y e z avente come soluzioni tutti e soli i punti del piano π. Facciamo un esempio: determiniamo equazioni parametriche e cartesiana del piano π : $(1, 2, 1) + \langle (1, 0, 1), (0, 1, 2) \rangle$. Le equazioni parametriche di π sono:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Dalla prima equazione otteniamo $\lambda = x - 1$ e dalla seconda equazione otteniamo $\mu = y - 2$. Sostituendo queste espressioni di λ e μ nella terza equazione otteniamo $z = 1 + x - 1 + 2y - 4$, cioè $x + 2y - z = 4$ che è l'equazione cartesiana del piano π.

Notiamo che, ovviamente, le coordinate del punto $(1, 2, 1)$ soddisfano l'equazione del piano π e che lo spazio direttore del piano, cioè il sottospazio $\langle (1, 0, 1), (0, 1, 2) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$, è l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $x + 2y - z = 0$.

Proponiamo ora un altro metodo per determinare l'equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

Esempio 5.2.2 Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi: \ (1,0,1)+\langle(1,1,1),(0,1,1)\rangle$. Dobbiamo descrivere i punti $(x,y,z) \in (1,0,1)+\langle(1,1,1),(0,1,1)\rangle$, cioè i punti (x,y,z) tali che $(x,y,z)-(1,0,1) \in \langle(1,1,1),(0,1,1)\rangle$. Questo equivale a determinare i punti (x,y,z) tali che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x-1 & y & z-1 \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Riduciamo la matrice in forma a scala:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & y+1-x & z-x \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-y-1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow z-y=1.$$

L'equazione cartesiana del piano π è dunque $z-y=1$.

Notiamo che le coordinate del punto $(1,0,1)$ soddisfano ovviamente l'equazione trovata, essendo $(1,0,1)$ un punto di π. L'equazione omogenea $z-y=0$, d'altra parte, è proprio l'equazione della giacitura del piano, cioè l'equazione del sottospazio $\langle(1,1,1),(0,1,1)\rangle$.

Esempio 5.2.3 In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ vogliamo descrivere il piano di equazione $3x-y=5$. Occorre quindi descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione data, nella forma $(x_0,y_0,z_0)+W$, essendo W un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $3x-y=5$ è $\{(x,3x-5,z) \in \mathbb{R}^3\} = (0,-5,0)+\langle(1,3,0),(0,0,1)\rangle$. Il piano cercato passa dunque per il punto $(0,-5,0)$ ed ha giacitura $\langle(1,3,0),(0,0,1)\rangle$.

5.2.4 *Posizione reciproca di due piani in* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Si tratta di studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ e $(a',b',c') \neq (0,0,0)$. Possiamo scrivere il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix},$$

i.e., $A\underline{x} = \underline{d}$. Abbiamo due possibilità:

- rg$A = 1$. In questo caso le equazioni delle giaciture dei due piani sono proporzionali. I due piani sono paralleli (Definizione 5.1.9): ciò vuol dire che hanno la stessa giacitura. Per la matrice completa ci sono due possibilità: se essa ha rango due allora il sistema non ha soluzioni, e quindi i due piani sono paralleli senza punti in comune. Se la matrice completa ha rango 1 il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due variabili libere: l'insieme delle soluzioni del sistema è un piano e i due piani di partenza coincidono.

- rg$A = 2$. I due piani non sono paralleli e il rango della matrice completa è necessariamente uguale a due. Quindi il sistema ammette soluzioni. Il sistema omogeneo associato è un sistema a 3 incognite, di rango due: l'insieme delle sue soluzioni dipende da una variabile libera. L'intersezione dei due piani è pertanto una varietà lineare di dimensione uno: una retta.

5.2.5 *Le rette in* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. In 5.2.4 abbiamo visto che due piani non paralleli si intersecano lungo una retta. È dunque possibile descrivere una retta in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ attraverso un sistema lineare in 3 incognite di rango 2:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

con rg $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$. Tali equazioni si chiamano *equazioni cartesiane* della retta nello spazio affine tridimensionale.

Determinare esplicitamente le equazioni cartesiane di una retta $r : (x_0, y_0, z_0) + \langle (m, n, p) \rangle$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, significa determinare i punti (x, y, z) tali che $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \in \langle (m, n, p) \rangle$, cioè tali che la matrice

$$\begin{pmatrix} m & n & p \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Riducendo la matrice in forma a scala ed imponendo che la matrice ridotta abbia rango uno si ottiene un sistema di equazioni cartesiane per r.

Ad esempio, determiniamo le equazioni cartesiane della retta $r : (1, 1, 1) + \langle (1, 2, 0) \rangle$. Usando il procedimento appena descritto, si tratta di determinare i punti (x, y, z) tali che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x - 1 & y - 1 & z - 1 \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Riducendo la matrice in forma a scala otteniamo:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2x+y+1 & z-1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2x+y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

La retta r ha dunque equazioni cartesiane

$$\begin{cases} -2x+y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

Naturalmente ogni sistema lineare equivalente a quello trovato descrive la medesima retta r, interpretandola come intersezione di due piani diversi.

Notiamo che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

descrive lo spazio direttore $\langle(1,2,0)\rangle$ della retta r.

5.2.6 Naturalmente, così come accade in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, anche in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ possiamo descrivere una retta attraverso delle equazioni parametriche. Consideriamo la retta r passante per il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e avente spazio direttore $W = \langle(a,b,c)\rangle$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Allora le equazioni parametriche di r sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{5.4}$$

Certamente le equazioni parametriche di r non sono uniche nel senso che al posto del punto P potremmo scegliere un qualsiasi altro punto di r e al posto del vettore (a,b,c) un suo qualsiasi multiplo non nullo. Il vettore (a,b,c) si chiama *vettore direttore* della retta r.

Il metodo più comodo per passare dalle equazioni parametriche alle equazioni cartesiane di r consiste nella eliminazione del parametro dalle equazioni (5.4): si utilizza una equazione per esprimere il parametro in funzione di una variabile e si sostituisce l'espressione trovata nelle restanti due equazioni.

Esempio 5.2.7 Descrivere mediante equazioni cartesiane la retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Usiamo la prima equazione per esprimere il parametro λ in funzione di x: $\lambda = x + 1$ e sostituiamo l'espressione di λ così ottenuta nelle altre due equazioni. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2x + 2 \end{cases}$$

che è il sistema delle equazioni cartesiane di r. Naturalmente ogni sistema lineare equivalente a quello trovato (cioè avente lo stesso insieme di soluzioni) descrive la retta r.

Esercizio 5.2.8 Intersezione tra una retta e un piano nello spazio. Consideriamo la retta

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

dove $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$, e il piano $\pi:\ a''x+b''y+c''z = d''$ con $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$. Il sistema che descrive la loro intersezione è :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c'' = d'' \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

con $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \geq 2$ (le prime due righe sono necessariamente linearmente indipendenti). Indichiamo il sistema con $A\underline{x} = \underline{d}$. Abbiamo le seguenti possibilità:

- $\mathrm{rg}A = 2$. In questo caso l'equazione (omogenea) della giacitura del piano è combinazione lineare delle equazioni che individuano la giacitura della retta. Questo significa che la retta è parallela al piano. Per la matrice completa vi sono due possibilità: se essa ha rango 3 il sistema non ha soluzioni, quindi la retta è parallela al piano e non ha punti in comune con esso. Se il rango della matrice completa è 2, il sistema ha infinite soluzioni che individuano una varietà lineare di dimensione uno, cioè una retta. La retta di partenza è pertanto contenuta nel piano.

- rg$A = 3$. In questo caso l'equazione del piano è indipendente dall'equazione della retta. Per la matrice completa abbiamo una sola possibilità: che abbia anch'essa rango 3. Il sistema ha quindi una ed una sola soluzione: il punto di intersezione tra la retta e il piano. Diremo in questo caso che la retta e il piano sono *incidenti*.

Esercizio 5.2.9 *Posizione reciproca di due rette in* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Sempre più arditi, studiamo l'intersezione tra due rette nello spazio affine tridimensionale. Consideriamo le rette r e s di equazioni:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d'''. \end{cases}$$

Ambedue i sistemi, descrivendo delle rette, hanno rango 2. Il sistema delle loro equazioni è allora dato, in termini matriciali, da

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{pmatrix}$$

i.e., $A\underline{x} = \underline{d}$. Si ha subito rg$A \geq 2$, dal momento che le prime due righe (e le ultime due) sono linearmente indipendenti. Distinguiamo i seguenti casi:

- rg$A = 2$. Significa che le ultime due righe di A sono linearmente dipendenti dalle prime due. Quindi gli spazi direttori delle due rette sono uguali: le due rette sono parallele. Se la matrice completa ha anch'essa rango due il sistema ammette soluzioni e queste formano una varietà lineare di dimensione uno, pertanto le due rette coincidono. Se il rango della matrice completa è tre (il rango della matrice incompleta è diverso dal rango della matrice completa) allora il sistema non ha soluzioni. Le due rette sono parallele e non si incontrano. Si noti che la matrice completa è di ordine 4: può avere rango 4? Certamente no: la matrice completa si ottiene infatti aggiungendo alla matrice completa una sola colonna. Dunque il rango di A ed il rango di $(A|\underline{d})$ possono differire al più di uno.

- rg$A$ = 3. In questo caso la matrice incompleta ha rango massimo. Se il rango della matrice completa è 3 allora il sistema ha una ed una sola soluzione: le due rette si intersecano in un punto. Se la matrice completa ha rango 4 allora le due rette non hanno punti in comune ma non sono parallele. In questo caso le due rette si dicono *sghembe*.

Esercizio 5.2.10 *Caratterizzazione geometrica delle rette sghembe.*
Abbiamo definito le rette sghembe utilizzando la struttura del sistema delle loro equazioni. Vogliamo ora dare di esse una caratterizzazione più geometrica. In effetti quello che vogliamo vedere è che due rette sono sghembe se e solo se non esiste alcun piano contenente entrambe. Nell'Esercizio 5.2.9 abbiamo esaminato tutte le possibili mutue posizioni di due rette in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Date due rette, supponiamo che esista un piano che le contenga: allora le due rette o sono parallele senza alcun punto in comune, oppure hanno un punto in comune, oppure coincidono. In ogni caso non possono essere sghembe. Viceversa, se non esiste alcun piano che le contiene non possono essere parallele e non possono intersecarsi (perché sarebbero in entrambi i casi complanari - si vedano, a questo proposito, i quesiti 2 e 3 dell'Esercizio 5.2.12). L'unica possibilità è quindi che le rette siano sghembe.

Osservazione 5.2.11 Ci poniamo ora il seguente quesito: date due sottovarietà lineari $L_1 = P+V_1$ e $L_2 = Q+V_2$ di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, come facciamo a stabilire se esse coincidono? Mostriamo che L_1 e L_2 coincidono se e solo se $P \in L_2$ e $V_1 = V_2$.

Se L_1 e L_2 coincidono allora $L_1 = P + V_1 = Q + V_2 = L_2$ e dunque $P = P + \mathbf{0}_{V_1} \in L_2$. D'altro canto se $L_1 = L_2$ allora $P + v_1 \in L_2$, per ogni $v_1 \in V_1$, cioè si può scrivere $P+v_1 = Q+v_2$ con $v_2 \in V_2$. Ma $P \in L_2$ e dunque $P = Q+s_2$ con $s_2 \in V_2$, ne deriva che $P+v_1 = (Q+s_2)+v_1 = Q+v_2$ e per le proprietà degli spazi affini si ha $Q+(s_2+v_1) = Q+v_2$, dunque $s_2+v_1 = v_2$, i.e., $v_1 = v_2 - s_2 \in V_2$ dunque ogni vettore di V_1 è un vettore di V_2: $V_1 \leq V_2$. Notiamo che potevamo fare l'analogo ragionamento con $Q \in L_2$ e ottenere che $V_2 \leq V_1$, dunque $V_1 = V_2$.

Viceversa, prendiamo due varietà lineari $L_1 = P + V_1$ e $L_2 = Q + V_2$ tali che: $P \in L_2$ e $V_1 = V_2$; prendiamo un punto $P + v_1$ di L_1, con $v_1 \in V_1 = V_2$. Dal momento che $P \in L_2$ possiamo scrivere $P = Q+v_2$ con $v_2 \in V_2$ e dunque: $P+v_1 = (Q+v_2)+v_1$, ma $v_1+v_2 \in V_2$ e quindi $P+v_1 \in L_2$. Abbiamo ottenuto da $P \in L_2$ e $V_1 = V_2$ che $L_1 \subseteq L_2$. Ma se $P \in L_2$ e $V_1 = V_2$ allora vale anche $Q \in L_1$. Infatti se si ha $P = Q + v_2$ con $v_2 \in V_2 = V_1$ allora sommando a

P il vettore $-v_2 \in V_1 = V_2$ si ha che $P + (-v_2) = (Q + v_2) + (-v_2) = Q$ ottenendo che $Q = P + (-v_2) \in L_1$. Possiamo a questo punto ripetere per Q il ragionamento fatto sopra ottenendo $L_2 \subseteq L_1$. Così abbiamo dimostrato che le varietà $L_1 = P + V_1$ e $L_2 = Q + V_2$ coincidono se e solo se $P \in L_2$ e $V_1 = V_2$. Equivalentemente possiamo affermare che L_1 e L_2 coincidono se e solo se esiste un punto di L_1 che appartiene ad L_2 e le giaciture di L_1 e L_2 sono uguali.

Esercizio 5.2.12 Vogliamo ora risolvere alcuni quesiti utilizzando le costruzioni realizzate finora.
<u>Quesito 1</u>: determinare un piano che contenga la retta $r : (1, 1, 1) + \langle(2, 1, 0)\rangle$ e che sia parallelo alla direzione data dal vettore $v = (1, 0, -1)$.
Risoluzione: quello che cerchiamo di trovare è una scrittura del tipo: $P + \langle v_1, v_2\rangle$. Ora, il piano cercato passa per $(1, 1, 1)$ dovendo contenere la retta $(1, 1, 1) + \langle(2, 1, 0)\rangle$, e la sua giacitura deve contenere la giacitura della retta r (cioè $(2, 1, 0)$) e la direzione $(1, 0, -1)$. Abbiamo fatto: il piano è dato da: $(1, 1, 1) + \langle(2, 1, 0), (1, 0, -1)\rangle$. Per determinare una sua equazione cartesiana cerchiamo gli elementi (x, y, z) tali che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Riducendo la matrice in forma a scala otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 se e solo se $x - 2y + z = 0$. Questa è quindi l'equazione cartesiana del piano cercato. Il piano passa quindi per l'origine $(0, 0, 0)$ e può essere descritto semplicemente mediante la scrittura $\langle(2, 1, 0), (1, 0, -1)\rangle$, intendendo con essa la varietà $(0, 0, 0) + \langle(2, 1, 0), (1, 0, -1)\rangle$.
<u>Quesito 2</u>: in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siano date le rette r_1: $(1, 1, 0)+\langle(1, 0, -1)\rangle$ e r_2: $(3, 2, 1)+\langle(2, 1, 1)\rangle$; determinare, se possibile, un piano che contenga r_1 e r_2.
Risoluzione: in questo caso abbiamo una descrizione esplicita dei punti della retta r_1: essi sono della forma $(1 + t, 1, -t)$ al variare di t nell'insieme dei numeri reali, mentre i punti di r_2 sono della forma $(3 + 2q, 2 + q, 1 + q)$ con $q \in \mathbb{R}$. Studiamo la posizione reciproca delle due rette: r_1 e r_2 non sono certo

parallele dal momento che hanno giaciture diverse. I punti in comune alle due rette sono i punti tali che si possa scrivere $(1+t, 1, -t) = (3+2q, 2+q, 1+q)$, per qualche t e q in $\mathbb{R}$. Con qualche calcolo si ottiene $q = -1$ e $t = 0$. Le due rette hanno pertanto in comune il punto $(1, 1, 0)$. La retta r_2 si può allora scrivere come $(1, 1, 0) + \langle(2, 1, 1)\rangle$. Il piano che contiene r_1 e r_2 dovrà essere parallelo ad entrambe le rette e quindi la sua giacitura deve contenere la giacitura di entrambe: $(1, 0, -1), (2, 1, 1)$, e passare per il loro punto di intersezione. Il piano è dunque: $(1, 1, 0) + \langle(1, 0, -1), (2, 1, 1)\rangle$.
Quesito 3: Date due rette parallele r_1 e r_2, determinare il piano che le contenga. Ad esempio siano r_1 e r_2 le rette paralelle $(1, 1, 0) + \langle(1, 1, -1)\rangle$ e $(3, 1, -1) + \langle(-2, -2, +2)\rangle$ rispettivamente.
Risoluzione: ovviamente il piano che contiene r_1 e r_2 dovrà contenere i punti $(1, 1, 0)$ e $(3, 1, -1)$ e la sua giacitura dovrà contenere lo spazio direttore delle due rette : $\langle(1, 1, -1)\rangle$. In altre parole il piano è del tipo $(1, 1, 0) + \langle(1, 1, -1), v\rangle$ (con v vettore per ora sconosciuto ma linearmente indipendente da $(1, 1, -1)$) e tale che il punto $(3, 1, -1)$ appartenga al piano. Ma ecco che allora il vettore differenza tra i due punti $(1, 1, 0) - (3, 1, -1)$ deve appartenere alla giacitura del piano, cioè $(-2, 0, 1) \in \langle(1, 1, -1), v\rangle$. Essendo tale vettore linearmente indipendente da $(1, 1, -1)$ ne segue che il piano cercato è : $(1, 1, 0) + \langle(1, 1, -1), (-2, 0, 1)\rangle$.
Quesito 4 Siano dati la retta r: $(1, 2, 0)+\langle(1, 1, 1)\rangle$ e il punto $M = (0, -1, -1)$; determinare il piano che li contenga.
Risoluzione: se il punto appartenesse alla retta allora non vi sarebbe un solo piano contenente la retta e il punto. Ma affinché il punto M appartenga alla retta deve esistere $t \in \mathbb{R}$ tale che sia $(1 + t, 2 + t, t) = (0, -1, -1)$, e si vede subito che questo non può avvenire per nessun t reale. Allora il piano cercato deve contenere i punti $(1, 2, 0)$, $(0, -1, -1)$ e la sua giacitura deve contenere $(1, 1, 1)$. Ora la giacitura dovrà anche contenere un vettore che sommato ad $(1, 2, 0)$ dia $(0, -1, -1)$ cioè dovrà contenere il vettore $(1, 2, 0)-(0, -1, -1) = (1, 3, 1)$. Tale vettore è linearmente indipendente da $(1, 1, 1)$ e deve stare nella giacitura del piano. Il piano è dato allora da $(1, 2, 0) + \langle(1, 3, 1), (1, 1, 1)\rangle$.

Esercizio 5.2.13 Qual è il piano in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ individuato da tre punti distinti e non allineati (significato: che non appartengono ad una stessa retta)? Consideriamo tre punti distinti, non allineati $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Il piano contenente P_1, P_2 e P_3 potrà essere descritto come $P_1+\langle v_1, v_2\rangle$ (al posto di P_1 avremmo anche potuto usare P_2 o P_3). Come deve essere fatto lo spazio vettoriale giacitura? Sicuramente dovrà contenere i vettori che sommati a P_1 diano P_2 e P_3, cioè $P_3 - P_1$ e $P_2 - P_1$. Quindi il piano sarà $P_1 + \langle P_3 - P_1, P_2 - P_1 \rangle$. Siamo sicuri di aver determinato un piano perché i punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati, quindi $\dim(\langle P_3 - P_1, P_2 - P_1 \rangle) = 2$. Se i punti fossero allineati $P_3 - P_1$ sarebbe un multiplo di $P_2 - P_1$ e quindi avremmo $\dim(\langle P_3 - P_1, P_2 - P_1 \rangle) = 1$. Questa non è che la traduzione algebrica del fatto geometrico che per tre punti allineati non passa un solo piano ma molti. Quanti?

Esercizio 5.2.14 Quando quattro punti di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono complanari? Prendiamo quattro punti distinti P_1, P_2, P_3 e P_4 di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Se i quattro punti sono allineati, certo sono complanari perché esistono infiniti piani contenenti una retta. Se P_1, P_2 e P_3 sono allineati e P_4 non appartiene alla retta r da essi individuata, la retta r e il punto P_4 individuano un unico piano che contiene i 4 punti. Supponiamo ora che P_1, P_2, P_3 e P_4 siano a 3 a 3 non allineati. Consideriamo i punti P_1, P_2 e P_3. Abbiamo visto prima che un piano che li contiene è dato da $P_1 + \langle P_3 - P_1, P_2 - P_1 \rangle$. Ora, affinché P_4 appartenga a questo piano, deve succedere che il vettore $P_4 - P_1$ stia nella giacitura del piano: $P_4 - P_1 \in \langle P_3 - P_1, P_2 - P_1 \rangle$, cioè che $P_4 - P_1$ sia combinazione lineare dei vettori $P_3 - P_1$ e $P_2 - P_1$. Questo significa che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} P_4 - P_1 \\ P_3 - P_1 \\ P_2 - P_1 \end{pmatrix}$$

è uguale a due (con questa scrittura intendiamo la matrice che ha come righe i vettori coordinate dei vettori $P_i - P_1$).

Osservazione 5.2.15 Vogliamo porci la seguente domanda: una varietà lineare può essere un sottospazio vettoriale? La domanda non è veramente ben posta. Da una parte uno spazio vettoriale è costituito da vettori e dall'altra una sottovarietà lineare è fatta semplicemente da punti dello spazio affine. È un po' come chiedersi se una cassa di aringhe sia uguale o meno ad una cassa di pesci San Pietro...la domanda non ha senso. Le nostre definizioni su spazi vettoriali e spazi affini non lo permettono. Ma potremmo in ogni caso osservare che la sottovarietà più vicina ad uno spazio vettoriale è quella data da $P + V$ ove $V \leq \mathbb{R}^3$ e P, pensato come un vettore di $\mathbb{R}^3$, appartiene a V. In tal caso, pensando ogni punto di $P + V$ come un vettore, si ha l'identificazione $P + V = V$. Quindi in modo poco ortodosso possiamo dire che una sottovarietà lineare $P+V$ è un sottospazio vettoriale se e solo se $P \in V$. In tal caso $P+V$ coincide con V, nel senso che è una sottovarietà contenente il punto di coordinate $(0,0,0)$, a rigore: $V=(0,0,0)+V=P+V$.

5.3 Esercizi proposti

Esercizio 5.3.1 In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $P=(1,2,0)$ e $Q=(0,0,-1)$.

1. Determinare la retta r passante per P e Q;
2. determinare equazioni cartesiane della retta s parallela a r, passante per il punto $T=(1,1,1)$;
3. determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r ed s;
4. determinare il piano σ parallelo a π passante per il punto $R=(1,1,2)$.

Esercizio 5.3.2 Date le rette $r: \begin{cases} x-y+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x+y-4z=1 \\ x-y-2z=2, \end{cases}$ determinare:

1. la posizione reciproca delle rette r ed s;
2. se possibile, una retta incidente la retta r in $(0,0,0)$ e non incidente s.

Esercizio 5.3.3 In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $P=(1,1,1)$ e $Q=(1,0,2)$.

1. Determinare, se possibile, un piano passante per i punti P e Q, parallelo al vettore $v=(1,2,1)$. Quanti piani esistono come quello richiesto?
2. Determinare, se possibile, un piano passante per i punti P e Q, parallelo al vettore $v=(0,2,-2)$. Quanti piani esistono come quello richiesto?
3. Determinare, se possibile, un piano passante per i punti P e Q, contenente il punto $R=(1,1,-1)$. Quanti piani esistono come quello richiesto?
4. Determinare, se possibile, un piano passante per i punti P, Q, R e $S=(2,-1,0)$. Quanti piani esistono come quello richiesto?

Esercizio 5.3.4 Stabilire se esistono valori del parametro reale k tali che i punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (k, k, 1)$ ed $R = (2, 1, 2)$ siano allineati. Determinare, al variare di k, il piano π_k contenente i punti P, Q ed R. Determinare, se possibile, il valore di k tale che π_k sia parallelo alla retta r di equazioni $r : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x + y + 3z = 1. \end{cases}$

Esercizio 5.3.5 Date le rette $r : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + z = 6 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 2 \\ x + y - 2z = -1, \end{cases}$ determinare:

1. la posizione reciproca delle rette r ed s;
2. un piano contenente r ed s;
3. se possibile, una retta passante per $T = (1, 1, 1)$ incidente le rette r ed s.