Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Canale L-Z
Corso di GEOMETRIA E ALGEBRA. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 5 novembre 2012 - Esempio di I prova parziale

Esercizio 1. Dato il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \langle (1,1,1), (1,2,2), (1,3,3) \rangle,$$

(a) calcolare la dimensione di W e determinare una sua base $\mathcal{B}$;

(b) completare $\mathcal{B}$ in una base di $\mathbb{R}^3$;

(c) stabilire se il vettore $v = (1,0,0)$ appartiene a W e, in caso affermativo, determinare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$;

(d) determinare, se possibile, un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $\dim(W \cap T) = 1$;

(e) è possibile descrivere W come insieme di soluzioni di un'equazione lineare? In caso affermativo si scriva una equazione lineare che abbia W come insieme di soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z dipendente dal parametro reale k:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 1 - k \\ kx + (4-k)y + kz = 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare Σ_k ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

(b) Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_k interpretato ora come sistema lineare nelle 4 incognite x, y, z, t.

Svolgimento

Esercizio 1. (a) Si ha: $\dim W = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Una base di W è dunque $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1)\}$.

(b) Per completare $\mathcal{B}$ in una base di $\mathbb{R}^3$ basta aggiungere un vettore linearmente indipendente dai vettori della base $\mathcal{B}$, ad esempio il vettore $(0,0,1)$. Si ha, infatti: $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

(c) Poiché $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$, $(1,0,0)$ appartiene a W e le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1,-1)_{\mathcal{B}}$.

(d) Un sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 che abbia intersezione di dimensione 1 con W è un qualsiasi sottospazio di dimensione 2 diverso da W, ad esempio $T = \langle (0,1,1), (0,0,1) \rangle$.

(e) È possibile descrivere W come insieme di soluzioni di un sistema lineare di rango 1 (cioè di una equazione lineare) in tre variabili dal momento che $\dim W = 2$. Osserviamo che i vettori della base $\mathcal{B}$ hanno seconda e terza coordinata uguali, perciò tutti (e soli) i vettori di W soddisfano l'equazione $y = z$.

Esercizio 2. (a) La matrice completa associata al sistema Σ_k è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 1-k \\ k & 4-k & k & 1 \end{array}\right)$$

Riduciamo la matrice $(A|\underline{b})$ in forma a scala per righe:

$$(A|\underline{b}) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 4-2k & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-2k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \end{array}\right)$$

Si ha, dunque:
- per ogni $k \neq 2, 1$, $rgA = rg(A|\underline{b}) = 3$: il sistema ha in questo caso una soluzione che possiamo trovare risolvendo il sistema lineare associato alla matrice ridotta in forma a scala, vale a dire il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (4-2k)y = 1 \\ (k-1)z = 1-k \end{cases}$$

Procedendo per sostituzioni successive dal basso otteniamo l'unica soluzione $(\frac{3-2k}{4-2k}, \frac{1}{4-2k}, -1)$;
- se $k = 2$, $rgA = 2 < rg(A|\underline{b}) = 3$, pertanto il sistema non ha soluzioni;
- se $k = 1$, $rgA = 2 = rg(A|\underline{b})$: il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $3 - 2$ variabili libere. Anche in questo caso possiamo trovare le soluzioni del sistema risolvendo il sistema lineare associato alla matrice ridotta in forma a scala, vale a dire il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_k per $k = 1$ è: $(-1/2, 1/2, 0) + \langle(1, 0, -1)\rangle$.
(b) Se interpretiamo Σ_k come un sistema lineare nelle variabili x, y, z, t, la matrice completa associata al sistema diventa:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 & 1-k \\ k & 4-k & k & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La colonna di zeri non influisce sulla riduzione in forma a scala, perciò la matrice ridotta in forma a scala risulta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & 1-k \end{array}\right)$$

Si ha, dunque:
- per ogni $k \neq 2, 1$, $rgA = rg(A|\underline{b}) = 3$: essendo il numero di variabili, in questo caso, uguale a 4, il sistema ha infinite soluzioni che possiamo trovare utilizzando quanto già calcolato rispondendo alla domanda (a) e considerando il fatto che la variabile t è una variabile libera. L'insieme di soluzioni del sistema è dunque: $(\frac{3-2k}{4-2k}, \frac{1}{4-2k}, -1, 0) + \langle(0, 0, 0, 1)\rangle$;
- se $k = 2$, $rgA = 2 < rg(A|\underline{b}) = 3$, quindi il sistema non ha soluzioni;
- se $k = 1$, $rgA = 2 = rg(A|\underline{b})$: il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $4 - 2$ variabili libere. Anche in questo caso possiamo trovare le soluzioni del sistema ricorrendo a quanto già calcolato precedentemente: l'insieme delle soluzioni è: $(-1/2, 1/2, 0, 0) + \langle(1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.