Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Canale L-Z
Corso di GEOMETRIA E ALGEBRA. Docente: Prof.ssa Nicoletta Cantarini
Bologna 5 novembre 2012 - Esempio di I prova parziale

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \langle (1,1,1), (-2,-2,1), (3,3,1) \rangle, \quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}.$$

(a) Determinare una base di S e una base di T e calcolare le dimensioni dei due sottospazi;

(b) Determinare un sistema lineare avente S come insieme di soluzioni;

(c) determinare una base $\mathcal{B}$ di $S \cap T$;

(d) completare $\mathcal{B}$ in una base di S e in una base di T;

(e) stabilire se il vettore $v = (1,0,0)$ si può scrivere come somma di un vettore di S e di uno di T. Tale scrittura è unica?

Esercizio 2.

(a) Risolvere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x+y=1 \\ x+(3k+1)y+(2k+1)z = 5k+2 \\ (3k)y+(4+k)z = 4+4k \end{cases}$$

(b) Stabilire se esistono dei vettori $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che siano soluzioni di Σ_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.
Esercizio 1.

(a) Si ha:

$$\dim(S) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Il sottospazio S è generato dalle righe della matrice di partenza e quindi dalle righe della matrice ridotta in forma a scala, perciò una base di S è: $\{(1,1,1), (0,0,1)\}$.

Abbiamo inoltre: $T = \{(x,-x,z) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$. Essendo i vettori $(1,-1,0)$ e $(0,0,1)$ linearmente indipendenti (poiché non sono uno multiplo dell'altro), T ha dimensione 2 e $\{(1,-1,0), (0,0,1)\}$ è una base di T.

(b) Dobbiamo determinare un sistema lineare avente come insieme di soluzioni il sottospazio vettoriale $S = \langle (1,1,1), (0,0,1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$. In altre parole dobbiamo descrivere attraverso un sistema di equazioni lineari tutti e soli i vettori (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ appartenenti ad S. Questo equivale a richiedere che i vettori (x,y,z) in questione siano combinazione lineare dei vettori $(1,1,1)$ e $(0,0,1)$ cioè soddisfino la condizione

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2.$$

Si ha:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow y - x = 0.$$

Il sottospazio S è dunque soluzione dell'equazione lineare $y - x = 0$.

(c) Per determinare una base di $S \cap T$ basta risolvere il sistema lineare costituito dall'equazione di S appena trovata e dall'equazione di T:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Una base di $S \cap T$ è dunque $\mathcal{B} = \{(0,0,1)\}$.

(d) Le basi di S e T precedentemente individuate: $\{(1,1,1),(0,0,1)\}$ e $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$, contengono $(0,0,1)$ perciò soddisfano la condizione richiesta.

(e) Ogni vettore di S è della forma $(a,a,a+b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$, ed ogni vettore di T è della forma $(c,-c,d)$ con $c,d \in \mathbb{R}$. Si tratta dunque di determinare $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tali che $(1,0,0) = (a,a,a+b)+(c,-c,d)$. Ad esempio possiamo prendere $a = 1/2$, $c = 1/2$, $b = -1/2$, $d = 0$, oppure $a = 1/2$, $c = 1/2$, $b = 0$, $d = -1/2$. La scrittura richiesta non è pertanto unica.

Esercizio 2.

(a) La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3k+1 & 2k+1 & 5k+2 \\ 0 & 3k & 4+k & 4+4k \end{array}\right).$$

Riduciamo la matrice in forma a scala per righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 2k+1 & 5k+1 \\ 0 & 3k & 4+k & 4+4k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 2k+1 & 5k+1 \\ 0 & 0 & -k+3 & -k+3 \end{array}\right).$$

Per ogni $k \neq 0, 3$, $rg(A) = 3 = (rg(A|b)$. In tali casi il sistema ammette una sola soluzione v che determiniamo per sostituzioni successive dal basso: $v = (0,1,1)$.

Se $k = 3$ la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si ha: $rg(A) = 2 = rg(A|b)$, pertanto il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $3 - 2 = 1$ variabile libera. L'insieme delle soluzioni in tal caso è: $(0,1,1) + \langle(-7,7,-9)\rangle$.

Infine, se $k = 0$, otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

che può essere ulteriormente ridotta in forma a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In tal caso $rg(A) = rg(A|b) = 2$, pertanto il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da una variabile libera: $(0, 1, 1) + \langle(1, -1, 0)\rangle$.

(b) Per $k \neq 0, 3$ il sistema ha l'unica soluzione $(0, 1, 1)$ che è soluzione del sistema anche per $k = 0$ e $k = 3$.