Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE
Canale L-Z, Professori Cantarini - Regonati
Geometria e Algebra
Bologna 24 Gennaio 2013
II prova parziale/II appello
Tema n.1

Risolvere i seguenti esercizi (Attenzione: gli esercizi 3, 4 e 5 costituiscono la seconda prova parziale):

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z, al variare del parametro reale k:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2. \end{cases}$$

(a) Stabilire se esistono valori di k per cui i vettori $(-2, 1, a)$ sono soluzioni del sistema assegnato per ogni $a \in \mathbb{R}$. In caso affermativo determinare tali valori.

(b) Stabilire se esistono valori di k per cui l'insieme $(-2, 1, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle$ è esattamente l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_k. In caso affermativo determinare tali valori.

(c) Stabilire se esistono valori di k per cui il sistema Σ_k ha un'unica soluzione. In caso affermativo determinare tali valori di k e risolvere i corrispondenti sistemi Σ_k.

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri il sottospazio vettoriale $S_k = \langle(1, 0, k), (1, 1, k), (0, 1, k)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcolare la dimensione di S_k al variare di k e determinarne una base.

(b) Costruire, se possibile, un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_k \cap T = \{(0, 0, 0)\}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(c) Stabilire se $S_0 \cup S_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(d) Determinare $\cap_{k\in\mathbb{R}} S_k$.

Esercizio 3. (5 punti) Si diagonalizzi la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$; si usi la diagonalizzazione di A per calcolare A^6.

Esercizio 4. (5 punti) Si determinino i valori del parametro reale k tali che la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sia diagonalizzabile.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $v_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$; si determini, se possibile, un vettore $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che v_1 e v_2 formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$; si determinino le coordinate del generico vettore $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2\}$, e si verifichi il risultato trovato.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.