Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE
Canale L-Z, Professori Cantarini - Regonati
Geometria e Algebra
Bologna 9 Gennaio 2013
II prova parziale/I appello
Tema n.1

Risolvere i seguenti esercizi (Attenzione: gli esercizi 3 e 4 costituiscono la seconda prova parziale):

Esercizio 1. (8 punti) Nello spazio affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino il piano π di equazione $\pi : z - y = 2$ e le rette

$$r_k : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2z - kx = 4 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

(a) Studiare la posizione reciproca di π e r_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;

(b) stabilire se esiste un punto P comune a tutte le rette r_k.

Esercizio 2. (7 punti) Si considerino i sottospazi vettoriali $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -c \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S, una base $\mathcal{C}$ di T e calcolare la dimensione di S e T;

(b) completare, se possibile, le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ nello stesso modo;

(c) determinare una base di $S \cap T$;

(d) data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, scrivere, se possibile, A come somma di una matrice di S e di una di T. Tale scrittura è unica?

Esercizio 3. (7 punti)
Per ciascuna delle seguenti matrici, si dica se è diagonalizzabile o meno; in caso affermativo, la si diagonalizzi, e si verifichi il risultato ottenuto.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. (8 punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sia $L = \langle a_1 \rangle$ la retta generata da a_1. Siano $f = \mathrm{pr}_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g = \mathrm{pr}_{L^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su L e $L^\perp$, rispettivamente. Si determini la proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_L(x)$ del generico vettore $x = [x_i]_{i=1}^3$ sulla retta L. Si determini la matrice $M(f)$ che rappresenta la funzione f. I vettori a_1, a_2, a_3 formano una base $\mathfrak{V}$ di $\mathbb{R}^3$; si determinino le matrici $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ e $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(g)$ che rappresentano f e g rispetto alla base $\mathfrak{V}$.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.

Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE
Canale L-Z, Professori Cantarini - Regonati
Geometria e Algebra
Bologna 9 Gennaio 2013
II prova parziale/I appello
Tema n.2

Risolvere i seguenti esercizi (Attenzione: gli esercizi 3 e 4 costituiscono la seconda prova parziale):

Esercizio 1. (8 punti) Nello spazio affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino il piano π di equazione $\pi : y - z + 2 = 0$ e le rette

$$r_h : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ (2+h)z - 3hy = 4 + 2h \end{cases} \quad (h \in \mathbb{R}).$$

(a) Studiare la posizione reciproca di π e r_h al variare di $h \in \mathbb{R}$;

(b) stabilire se esiste un punto P comune a tutte le rette r_h.

Esercizio 2. (7 punti) Si considerino i sottospazi vettoriali $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, b = a \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a - b + c + d = 0 \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S, una base $\mathcal{C}$ di T e calcolare la dimensione di S e T;

(b) completare, se possibile, le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ nello stesso modo;

(c) determinare una base di $S \cap T$;

(d) data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, scrivere, se possibile, A come somma di una matrice di S e di una di T. Tale scrittura è unica?

Esercizio 3. (7 punti) Per ciascuna delle seguenti matrici, si dica se è diagonalizzabile o meno; in caso affermativo, la si diagonalizzi, e si verifichi il risultato ottenuto.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. (8 punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sia $L = \langle a_1 \rangle$ la retta generata da a_1. Siano $f = \mathrm{pr}_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g = \mathrm{pr}_{L^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su L e $L^\perp$, rispettivamente. Si determini la proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_L(x)$ del generico vettore $x = [x_i]_{i=1}^3$ sulla retta L. Si determini la matrice $M(f)$ che rappresenta la funzione f. I vettori a_1, a_2, a_3 formano una base $\mathfrak{V}$ di $\mathbb{R}^3$; si determinino le matrici $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ e $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(g)$ che rappresentano f e g rispetto alla base $\mathfrak{V}$.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.