Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE
Canale L-Z, Professori Cantarini - Regonati
Geometria e Algebra
Bologna 24 Gennaio 2013
I appello: Svolgimento I parte
Tema n.1

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z, al variare del parametro reale k:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2. \end{cases}$$

(a) Stabilire se esistono valori di k per cui i vettori $(-2, 1, a)$ sono soluzioni del sistema assegnato per ogni $a \in \mathbb{R}$. In caso affermativo determinare tali valori.

(b) Stabilire se esistono valori di k per cui l'insieme $(-2, 1, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle$ è esattamente l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_k. In caso affermativo determinare tali valori.

(c) Stabilire se esistono valori di k per cui il sistema Σ_k ha un'unica soluzione. In caso affermativo determinare tali valori di k e risolvere i corrispondenti sistemi Σ_k.

Svolgimento. (a) Per stabilire se, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il vettore $(-2, 1, a)$ è soluzione del sistema assegnato basta sostituire le entrate di $(-2, 1, a)$ nel sistema. Si ottiene:

$$\begin{cases} -2 + 2 + ka = 0 \\ -2 + 1 = -1 \\ -2 + k = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ka = 0 \\ k = 0. \end{cases}$$

che è soddisfatto per ogni $a \in \mathbb{R}$ se $k = 0$.
(b) Per quanto visto rispondendo alla domanda (a) sappiamo già che l'insieme $(-2, 1, 0)+\langle(0, 0, 1)\rangle = \{(-2, 1, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ è contenuto nell'insieme delle soluzioni del sistema Σ_k per $k = 0$. Si tratta di capire se per $k = 0$ il sistema Σ_k ha anche altre soluzioni o se quelle già determinate sono tutte. Poiché le incognite del sistema sono 3 e $\dim\langle(0, 0, 1)\rangle = 1$, basta stabilire se per $k = 0$ le matrici completa e incompleta associate al sistema hanno rango 2. La matrice completa associata a Σ_k è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Riduciamo la matrice $(A|b)$ in forma a scala:

$$(A|b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & -1 & -k & -1 \\ 0 & k-2 & -k & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & -1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & -k^2+k & -k \end{array}\right).$$

Pertanto per $k = 0$ si ha esattamente $rg(A) = rg(A|b) = 2$.
(c) Il sistema Σ_k ha una ed una sola soluzione se e solo se $rg(A) = rg(A|b) = 3$. Dalla riduzione in forma a scala della matrice $(A|b)$ appena ottenuta, deduciamo immediatamente che questo succede per $k \neq 0, 1$. Per tali valori di k il sistema può essere risolto per sostituzioni successive dal basso. Abbiamo:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{k-1} \\ y = -\frac{1}{k-1} \\ x = \frac{2-k}{k-1} \end{cases}$$

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri il sottospazio vettoriale $S_k = \langle(1, 0, k), (1, 1, k), (0, 1, k)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcolare la dimensione di S_k al variare di k e determinarne una base.

(b) Costruire, se possibile, un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ tale che $S_k \cap T = \{(0,0,0)\}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(c) Stabilire se $S_0 \cup S_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(d) Determinare $\cap_{k\in\mathbb{R}} S_k$.

Svolgimento. (a) Si ha:

$$\dim(S_k) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha dunque:

- se $k = 0$, $\dim(S_0) = 2$ e $\mathcal{B}_0 = \{1,0,0),(0,1,0)\}$ è una base di S_0;
- per ogni $k \neq 0$, $\dim S_k = 3$, cioè $S_k = \mathbb{R}^3$ ed una sua base è, ad esempio, la base canonica.

(b) Basta scegliere $T = \{(0,0,0)\}$.
(c) Per quanto visto rispondendo alla domanda (a), $S_1 = \mathbb{R}^3$, perciò $S_0 \cup S_1 = \mathbb{R}^3$ che è un sottospazio vettoriale di se stesso.
(d) Per quanto visto rispondendo alla domanda (a), per ogni $k \neq 0$, $S_k = \mathbb{R}^3$, perciò $\cap_{k\in\mathbb{R}} S_k = S_0 \cap \mathbb{R}^3 = S_0$.