Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE
Canale L-Z, Professori Cantarini - Regonati
Geometria e Algebra
Bologna 9 Gennaio 2013
I appello, Svolgimento I parte
Tema n.1

Esercizio 1. (8 punti) Nello spazio affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino il piano π di equazione $\pi : z - y = 2$ e le rette

$$r_k : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2z - kx = 4 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

(a) Studiare la posizione reciproca di π e r_k al variare di $k \in \mathbb{R}$;

(b) stabilire se esiste un punto P comune a tutte le rette r_k.

Svolgimento. (a) Per studiare la posizione reciproca del piano π e delle rette r_k, al variare di k in $\mathbb{R}$, basta studiare il sistema lineare costituito dalle loro equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2z - kx = 4 - 3k \\ z - y = 2 \end{cases}$$

La matrice completa associata a tale sistema è:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -k & 0 & 2 & 4-3k \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Riduciamo tale matrice in forma a scala:

$$(A|b) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3k & 2-k & 4-2k \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2+2k & 4+4k \end{array} \right).$$

Si verificano dunque i seguenti casi:

- se $k = -1$, $rgA = rg(A|b) = 2$ pertanto il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da una variabile. Questo significa che la retta r_{-1} è contenuta nel piano π;
- per ogni $k \neq -1$, $rgA = 3 = rg(A|b)$ pertanto il sistema ammette una ed una sola soluzione. Questo significa che per ogni $k \neq -1$ la retta r_k interseca il piano π in un punto.

(b) Consideriamo innanzitutto l'intersezione di due delle rette date, ad esempio quelle che si ottengono per $k = 0$ e per $k = 1$:

$$r_0 : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2z = 4 \end{cases} \qquad r_1 : \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2z - x = 1 \end{cases} .$$

Considerando il sistema delle equazioni di r_0 e r_1 si ottiene:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2z - x = 1 \\ 2z = 4 \end{cases} .$$

Il sistema ottenuto può facilmente essere risolto per sostituzioni successive dal basso. Si ottiene così l'unico punto di intersezione $P = (3, 0, 2)$. Si tratta ora di stabilire se tale punto appartiene anche a tutte le altre rette r_k al variare di $k \in \mathbb{R}$. Sostituendo le coordinate di P nelle equazioni di r_k si ottengono le seguenti identità:

$$\begin{cases} 3 + 0 - 2 = 1 \\ 4 - 3k = 4 - 3k \end{cases} .$$

Dunque il punto $P = (3, 0, 2)$ è comune a tutte le rette r_k.

Esercizio 2. (7 punti) Si considerino i sottospazi vettoriali $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, b = -c \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a + b + c + d = 0 \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di S, una base $\mathcal{C}$ di T e calcolare la dimensione di S e T;

(b) completare, se possibile, le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ nello stesso modo;

(c) determinare una base di $S \cap T$;

(d) data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, scrivere, se possibile, A come somma di una matrice di S e di una di T. Tale scrittura è unica?

Svolgimento. (a) Abbiamo $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$, quindi ogni elemento di S è della forma

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di S. Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, infatti la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è non nulla, la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è linearmente indipendente da A_1 poiché non è un suo multiplo e la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è linearmente indipendente da A_1 e A_2 poiché l'elemento di posto 2,2 di A_1 e A_2 è zero mentre l'elemento di posto 2,2 di A_3 è 1. Dunque $\mathcal{B}$ è una base di S e $\dim(S) = 3$.

Analogamente abbiamo $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$, perciò ogni elemento di T è della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che l'insieme

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di T. Inoltre, ragionando analogamente a prima, è facile mostrare che gli elementi di $\mathcal{C}$ sono linearmente indipendenti e quindi individuano una base di T. Dunque anche $\dim(T) = 3$.

(b) Dal momento che $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$ e $\dim(S) = \dim(T) = 3$, per completare $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $M_2(\mathbb{R})$ basta aggiungere ai vettori di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ una matrice X. Affinché tale matrice sia linearmente indipendente sia dagli elementi di $\mathcal{B}$ che da quelli di $\mathcal{C}$ è sufficiente che la matrice X non appartenga né a S né a T. Ad esempio possiamo scegliere $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Il sottospazio $S \cap T$ è costituito dagli elementi di $M_2(\mathbb{R})$ che appartengono sia a S che a T, cioè

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, b = -c, a + b + c + d = 0 \right\}.$$

Si ha dunque:

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Dunque ogni elemento di $S \cap T$ è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $S \cap T$. Inoltre le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché non sono una multiplo dell'altra, perciò l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ individua una base di $S \cap T$.

(d) Vogliamo scrivere la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ come somma di una matrice di S e di una matrice di T cioè:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

per opportuni $a, c, d, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Abbiamo, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque la scrittura richiesta non è unica.

Esercizio 3. (7 punti)
Per ciascuna delle seguenti matrici, si dica se è diagonalizzabile o meno; in caso affermativo, la si diagonalizzi, e si verifichi il risultato ottenuto.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. (8 punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sia $L = \langle a_1 \rangle$ la retta generata da a_1. Siano $f = \mathrm{pr}_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g = \mathrm{pr}_{L^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le proiezioni ortogonali su L e $L^\perp$, rispettivamente. Si determini la proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_L(x)$ del generico vettore $x = [x_i]_{i=1}^3$ sulla retta L. Si determini la matrice $M(f)$ che rappresenta la funzione f. I vettori a_1, a_2, a_3 formano una base $\mathfrak{V}$ di $\mathbb{R}^3$; si determinino le matrici $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ e $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(g)$ che rappresentano f e g rispetto alla base $\mathfrak{V}$.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.