

**Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE**  
**Canale L-Z**  
**Geometria e Algebra**  
Bologna 10 Novembre 2012  
Svolgimento della I prova parziale  
Tema n.1

**Esercizio 1.** (10 punti) Risolvere, al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , il sistema lineare

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + (3k + 1)y + (2k + 1)z = 5k + 2 \\ (3k)y + (4 + k)z = 4 + 4k \end{cases}$$

nelle incognite  $x, y, z$ .

**Svolgimento.** La matrice completa associata al sistema lineare assegnato è:

$$(A|\underline{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3k + 1 & 2k + 1 & 5k + 2 \\ 0 & 3k & 4 + k & 4 + 4k \end{array} \right).$$

Riduciamo la matrice  $(A|\underline{b})$  in forma a scala:

$$(A|\underline{b}) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 2k + 1 & 5k + 1 \\ 0 & 3k & 4 + k & 4 + 4k \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 2k + 1 & 5k + 1 \\ 0 & 0 & 3 - k & 3 - k \end{array} \right).$$

Per ogni  $k \neq 0, 3$  si ha dunque  $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 3$ . Il sistema ha in ognuno di questi casi una sola soluzione che possiamo determinare risolvendo per sostituzioni successive dal basso il sistema lineare associato alla matrice ridotta in forma a scala:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3ky + (2k + 1)z = 5k + 1 \\ (3 - k)z = 3 - k \end{cases}$$

Dall'ultima equazione otteniamo  $z = 1$  che, sostituito nella seconda equazione, dà  $y = 1$ , da cui, usando la prima equazione,  $x = 0$ . Per ogni  $k \neq 0, 3$  il sistema ha dunque l'unica soluzione:  $(0, 1, 1)$ . Per  $k = 3$  la matrice ridotta in forma a scala diventa:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Dunque si ha:  $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 2$ , pertanto il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da 1 variabile. Per ottenere tali soluzioni risolviamo, per sostituzioni successive dal basso, il sistema lineare associato alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 9y + 7z = 16 \end{cases}$$

Otteniamo  $z = \frac{16}{7} - \frac{9}{7}y$  e  $x = 1 - y$ . L'insieme delle soluzioni del sistema per  $k = 3$  è dunque:  $\{(1 - y, y, \frac{16}{7} - \frac{9}{7}y) | y \in \mathbb{R}\} = (1, 0, \frac{16}{7}) + \langle (-1, 1, -\frac{9}{7}) \rangle$ .

Infine per  $k = 0$ , la matrice ottenuta mediante l'algoritmo di Gauss è:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right).$$

che può essere ridotta a scala sostituendo alla terza riga la terza riga sommata alla seconda moltiplicata per  $-3$ . Si ottiene così la matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Per  $k = 0$ , dunque, si ha  $rg(A) = rg(A|b) = 2$ , pertanto il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da una variabile. Il sistema di partenza è equivalente al sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

perciò, per  $k = 0$ , l'insieme delle soluzioni del sistema è:  $\{(1 - y, y, 1) | y \in \mathbb{R}\} = (1, 0, 1) + \langle (-1, 1, 0) \rangle$ .

**Esercizio 2.** (20 punti) Si consideri il sottospazio vettoriale  $U = \langle (1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle$  di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $W_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - ky + z = k, x + y - kz = 1\}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

- Calcolare la dimensione di  $U$  e determinare una sua base  $\mathcal{B}$ ;
- completare  $\mathcal{B}$  in una base  $\mathcal{B}'$  di  $\mathbb{R}^3$ ;
- siano  $v = (1, 2, 0)_{\mathcal{B}'}$  e  $w = (1, 2)_{\mathcal{B}}$ . Stabilire se  $v = w$ ;
- stabilire se esistono valori di  $k$  tali che  $W_k$  sia un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ ;
- determinare, se possibile, un sistema lineare avente  $U$  come insieme di soluzioni.

Interpretati  $U$  e  $W_k$  come sottovarietà lineari dello spazio affine tridimensionale,

- stabilire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'insieme  $W_k$  individua una retta;
- stabilire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'insieme  $W_k$  individua una retta parallela ad  $U$ ;
- posto  $k = 1$ , determinare, se possibile, un piano  $\pi$  contenente  $W_1$  e parallelo ad  $U$ .

**Svolgimento.** (a) Notiamo che i vettori  $(1, 1, 2)$  e  $(0, 1, 1)$  sono linearmente indipendenti perché non sono uno multiplo dell'altro. Il vettore  $(1, 2, 3)$ , invece, è una loro combinazione lineare dal momento che  $(1, 2, 3) = (1, 1, 2) + (0, 1, 1)$ . Dunque  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$  è una base di  $U$  che, pertanto, ha dimensione due.

(b) Per completare  $\mathcal{B}$  in una base di  $\mathbb{R}^3$  basta aggiungere un vettore linearmente indipendente dai vettori di  $\mathcal{B}$ , ad esempio  $(0, 0, 1)$ :  $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

(c) Per definizione di coordinate di un vettore rispetto ad una base, abbiamo:  $v = (1, 2, 0)_{\mathcal{B}'} = 1(1, 1, 2) + 2(0, 1, 1) + 0(0, 0, 1) = 1(1, 1, 2) + 2(0, 1, 1) = (1, 2)_{\mathcal{B}} = w$ .

(d)  $W_k$  non è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  per nessun valore di  $k$  dal momento che non contiene il vettore nullo  $(0, 0, 0)$  (la seconda equazione che definisce  $W_k$  non è omogenea per nessun valore di  $k$ ).

(e) Dal momento che  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2, esso può essere definito come insieme di soluzioni di un sistema lineare in tre variabili di rango 1, cioè di una equazione lineare in tre variabili. Determinare tale equazione significa descrivere i vettori  $(x, y, z)$  di  $\mathbb{R}^3$  che siano combinazione lineare dei vettori della base  $\mathcal{B}$ , cioè tali che

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2.$$

Riducendo la matrice ottenuta in forma a scala abbiamo:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-2x \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-x-y \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice ottenuta è uguale a 2 se e solo se  $-x - y + z = 0$ . Questa è dunque una equazione avente  $U$  come insieme di soluzioni.

Interpretiamo ora  $U$  e  $W_k$  come sottovarietà lineari dello spazio affine tridimensionale. Poiché  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2,  $U$  descrive un piano passante per  $(0, 0, 0)$ .

(i)  $W_k$  è definito come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - ky + z = k \\ x + y - kz = 1 \end{cases}$$

nelle variabili  $x, y, z$ . Tale sistema descrive una retta se e solo se il rango della matrice incompleta ad esso associata è uguale a due (e quindi uguale al rango della matrice completa associata al sistema). In tal caso, infatti, l'insieme delle soluzioni del sistema sarà una sottovarietà lineare di dimensione 1, cioè una retta. Abbiamo

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & 1+k & -k-1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow k \neq -1.$$

Perciò  $W_k$  individua una retta per ogni  $k \neq -1$ .

(ii) La retta  $W_k$  ( $k \neq -1$ ) risulta parallela al piano  $U$ , di equazione  $x + y - z = 0$ , se e solo se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano. Riducendo in forma a scala la matrice incompleta associata al sistema lineare che descrive  $W_k$ , abbiamo trovato la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & 1+k & -k-1 \end{pmatrix}$$

che può essere ulteriormente semplificata dividendo la seconda riga per  $1+k$ , essendo  $k \neq -1$ . La giacitura della retta  $W_k$ , per  $k \neq -1$ , può cioè essere descritta attraverso il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - ky + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Tale giacitura è contenuta in quella del piano  $U$  se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} x - ky + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

ha rango 2 cioè se e solo se è 2 il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1+k \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow k = 1.$$

Dunque la retta  $W_k$  è parallela al piano  $U$  se e solo se  $k = 1$ .

(iii) Un piano come richiesto esiste perché per  $k = 1$  la retta  $W_k$  è parallela al piano  $U$  (si veda la risposta alla domanda (ii)). Il piano  $\pi$ , essendo parallelo ad  $U$ , è descritto da una equazione della forma  $x + y - z = d$  e passa per un qualsiasi punto di  $W_1$ , ad esempio  $P = (1, 0, 0)$ , pertanto  $d = 1$ . Quindi  $\pi$  ha equazione cartesiana  $x + y - z = 1$ .