Corso di Laurea in INGEGNERIA GESTIONALE
Canale L-Z, Professori Cantarini - Regonati
Geometria e Algebra
Bologna 16 luglio 2013
V appello
Tema n.1

Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. (8 punti)

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare Σ_k nelle incognite x, y, z, t ammette soluzioni:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 2y + z + 2t = 1 \\ y + z + 2t = 0 \\ x + y + kt = 0 \\ ky + k^2 z + 2kt = 0; \end{cases}$$

b) per i valori di k per cui Σ_k è risolubile, dire quante soluzioni ammette;

c) stabilire se esistono valori di k per cui il sistema Σ_k è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ y + z = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S = (1,1,0) + \langle (0,1,1), (1,0,1) \rangle, \qquad T = \{(a, a-b+1, b-1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Stabilire se S e T sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo determinarne una base;

b) determinare una base dei sottospazi vettoriali $\langle S \rangle$ e $\langle T \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. (5 punti) Si diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix};$$

si calcoli la potenza A^{11} usando la diagonalizzazione di A.

Esercizio 4. (5 punti) Si determinino i valori del parametro reale k tali che la seguente matrice sia diagonalizzabile.

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. (5 punti) In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che v_1, v_2, v_3 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; si moltiplichino v_1, v_2, v_3 per opportuni scalari in modo che i vettori w_1, w_2, w_3 ottenuti formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$; si calcolino le coordinate di v rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3\}$; si verifichi il risultato trovato.

ATTENZIONE: ogni risposta deve essere opportunamente motivata. Qualsiasi risposta non motivata verrà ignorata.