Foglio di esercizi numero 2
Corso di Geometria e Algebra
Ingegneria Gestionale - Canale L-Z
Prof.ssa Nicoletta Cantarini

1. Sia V lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ costituito dalle funzioni da $[-1,1]$ in $\mathbb{R}$ dove, se $f,g \in V$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g$ è la funzione così definita: $(\alpha f+\beta g)(x) = \alpha f(x)+\beta g(x)$, $x \in [-1,1]$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di V:
   - $U = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
   - $W = \{f \in V \mid f(-1) = -1\}$;
   - $R = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ se } x < 0\}$;
   - $S = \{f \in V \mid f(x) \leq f(y) \text{ se } x \leq y\}$;
   - $T = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \forall\, x \in [-1,1]\}$.
2. Stabilire quali, tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Per ciascuno di questi esibire due insiemi diversi di generatori.
   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0, x=-y+z\}$;
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-z=0\}$;
   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-1=0, x=-y+z\}$;
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy=0\}$;
   (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y, y=z\}$.
3. Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x,y,z,w) \mid x+z=0, 3y-w=0\}$ e $T = \{(x,y,z,w) \mid x+z=0, y+2w=0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ ed esibire un insieme di generatori per ciascuno di essi.
4. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:
$$W = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+d=0\}.$$
   a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
   b) Determinare due diversi insiemi di generatori di W.

5. Stabilire se gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2,1), (-1,-1)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(-1,-3), (2,3)\}$$

generano $\mathbb{R}^2$. In caso affermativo scrivere un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}_1$ e di $\mathcal{B}_2$.

6. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalari ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non alla somma.