

Foglio di esercizi numero 3
Corso di Geometria e Algebra
Ingegneria Gestionale Canale L-Z
Proff.ssa Nicoletta Cantarini

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare:

- a) una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori riga di A ;
 - b) una base del sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dai vettori colonna di A .
2. Si considerino i seguenti vettori di \mathbb{R}^4 : $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (2, 2, 0, 3)$, $v_5 = (1, 0, 1, 1)$, $v_6 = (2, 0, 2, 0)$, $v_7 = (1, 7, 3, 2)$. Si dimostri che essi individuano un sistema di generatori di \mathbb{R}^4 e si estragga una base di \mathbb{R}^4 dall'insieme $\{v_1, \dots, v_7\}$.
3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

- a) Verificare che W è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
 - b) Determinare una base \mathcal{B} di W .
 - c) Completare \mathcal{B} ad una base di $M_2(\mathbb{R})$.
4. Dimostrare che gli insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$

sono basi di \mathbb{R}^2 . Determinare le coordinate dei vettori $(1, 3)$, $(2, -1)$ rispetto a tali basi. Quali sono le coordinate del vettore $(0, 1)_{\mathcal{B}_1}$ rispetto alla base \mathcal{B}_2 ?

5. Si considerino i vettori $v_1 = (t, 2t, -1)$, $v_2 = (-2, -4, t - 1)$, $v_3 = (1, -2, 1)$ di \mathbb{R}^3 , al variare del parametro reale t . Determinare, se esistono, i valori del parametro t per i quali v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

6. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = -c \right\}$.
- (a) Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Determinare una base \mathcal{B} di S .
 - (c) Completare \mathcal{B} in una base di $M_2(\mathbb{R})$ in due modi diversi.
 - (d) Esibire un insieme di generatori di S che non sia una base di S .
7. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{(1, t), (-t, -1)\}$ è una base di \mathbb{R}^2 . Calcolare le coordinate del vettore $(2, 1)$ rispetto alla base corrispondente ad uno dei valori trovati.