

Geometria e Topologia delle superfici

Alessio Savini

15 marzo 2017

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Due amici entrambi iscritti all'università, il primo a Matematica, il secondo ad Architettura, si incontrano per prendere un caffè. Improvvisamente qualcosa va storto e la discussione prende una piega strana...

Architetto: *Scusami se te lo chiedo, ma ogni tanto ti sento parlare di superfici. Mi sai dire cosa sono?*

Matematico: *Certamente, sono 2-varietà reali.*

Architetto: *L'unico varietà che conosco è il genere televisivo, ma temo non sia quello che intendi.*

Matematico: *Cerchiamo di essere più precisi: una varietà è uno spazio topologico T_2 , second countable e localmente euclideo...*

Architetto: *Fermati immediatamente! Topo-che? Localmente cosa? $2T$? Scusami ma non potresti essere più chiaro? Fai degli esempi che anche io possa capire!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Due amici entrambi iscritti all'università, il primo a Matematica, il secondo ad Architettura, si incontrano per prendere un caffè. Improvvisamente qualcosa va storto e la discussione prende una piega strana...

Architetto: *Scusami se te lo chiedo, ma ogni tanto ti sento parlare di superfici. Mi sai dire cosa sono?*

Matematico: *Certamente, sono 2-varietà reali.*

Architetto: *L'unico varietà che conosco è il genere televisivo, ma temo non sia quello che intendi.*

Matematico: *Cerchiamo di essere più precisi: una varietà è uno spazio topologico T_2 , second countable e localmente euclideo...*

Architetto: *Fermati immediatamente! Topo-che? Localmente cosa? $2T$? Scusami ma non potresti essere più chiaro? Fai degli esempi che anche io possa capire!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Due amici entrambi iscritti all'università, il primo a Matematica, il secondo ad Architettura, si incontrano per prendere un caffè. Improvvisamente qualcosa va storto e la discussione prende una piega strana...

Architetto: *Scusami se te lo chiedo, ma ogni tanto ti sento parlare di superfici. Mi sai dire cosa sono?*

Matematico: *Certamente, sono 2-varietà reali.*

Architetto: *L'unico varietà che conosco è il genere televisivo, ma temo non sia quello che intendi.*

Matematico: *Cerchiamo di essere più precisi: una varietà è uno spazio topologico T_2 , second countable e localmente euclideo...*

Architetto: *Fermati immediatamente! Topo-che? Localmente cosa? $2T$? Scusami ma non potresti essere più chiaro? Fai degli esempi che anche io possa capire!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Due amici entrambi iscritti all'università, il primo a Matematica, il secondo ad Architettura, si incontrano per prendere un caffè. Improvvisamente qualcosa va storto e la discussione prende una piega strana...

Architetto: *Scusami se te lo chiedo, ma ogni tanto ti sento parlare di superfici. Mi sai dire cosa sono?*

Matematico: *Certamente, sono 2-varietà reali.*

Architetto: *L'unico varietà che conosco è il genere televisivo, ma temo non sia quello che intendi.*

Matematico: *Cerchiamo di essere più precisi: una varietà è uno spazio topologico T_2 , second countable e localmente euclideo...*

Architetto: *Fermati immediatamente! Topo-che? Localmente cosa? $2T$? Scusami ma non potresti essere più chiaro? Fai degli esempi che anche io possa capire!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Due amici entrambi iscritti all'università, il primo a Matematica, il secondo ad Architettura, si incontrano per prendere un caffè. Improvvisamente qualcosa va storto e la discussione prende una piega strana...

Architetto: *Scusami se te lo chiedo, ma ogni tanto ti sento parlare di superfici. Mi sai dire cosa sono?*

Matematico: *Certamente, sono 2-varietà reali.*

Architetto: *L'unico varietà che conosco è il genere televisivo, ma temo non sia quello che intendi.*

Matematico: *Cerchiamo di essere più precisi: una varietà è uno spazio topologico T_2 , second countable e localmente euclideo...*

Architetto: *Fermati immediatamente! Topo-che? Localmente cosa? $2T$? Scusami ma non potresti essere più chiaro? Fai degli esempi che anche io possa capire!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Due amici entrambi iscritti all'università, il primo a Matematica, il secondo ad Architettura, si incontrano per prendere un caffè. Improvvisamente qualcosa va storto e la discussione prende una piega strana...

Architetto: *Scusami se te lo chiedo, ma ogni tanto ti sento parlare di superfici. Mi sai dire cosa sono?*

Matematico: *Certamente, sono 2-varietà reali.*

Architetto: *L'unico varietà che conosco è il genere televisivo, ma temo non sia quello che intendi.*

Matematico: *Cerchiamo di essere più precisi: una varietà è uno spazio topologico T_2 , second countable e localmente euclideo...*

Architetto: *Fermati immediatamente! Topo-che? Localmente cosa? $2T$? Scusami ma non potresti essere più chiaro? Fai degli esempi che anche io possa capire!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Matematico: *Facciamo così. Iniziamo da esempi architettonici. Partiamo dal toro. Un ottimo esempio è l'Icon Hotel di Dubai.*

Icon Hotel di Dubai



Architetto: *Ma scusa, il toro non ha le corna? Forse mi sto perdendo qualcosa.*

Matematico: *Colpa mia: in matematica parliamo di toro per riferirci alla ciambella.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Matematico: *Facciamo così. Iniziamo da esempi architettonici. Partiamo dal toro. Un ottimo esempio è l'Icon Hotel di Dubai.*

Icon Hotel di Dubai



Architetto: *Ma scusa, il toro non ha le corna? Forse mi sto perdendo qualcosa.*

Matematico: *Colpa mia: in matematica parliamo di toro per riferirci alla ciambella.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Matematico: *Facciamo così. Iniziamo da esempi architettonici. Partiamo dal toro. Un ottimo esempio è l'Icon Hotel di Dubai.*

Icon Hotel di Dubai



Architetto: *Ma scusa, il toro non ha le corna? Forse mi sto perdendo qualcosa.*

Matematico: *Colpa mia: in matematica parliamo di toro per riferirci alla ciambella.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

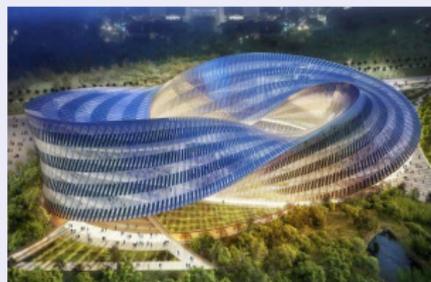
Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Matematico: *Facciamo altri esempi*

Moebius Strip Building a Taiwan



Architetto: *Carino, sembra difficile orientarsi lì dentro.*

Matematico: *Vedo che mi vuoi anticipare: di orientazione ne parleremo dopo.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

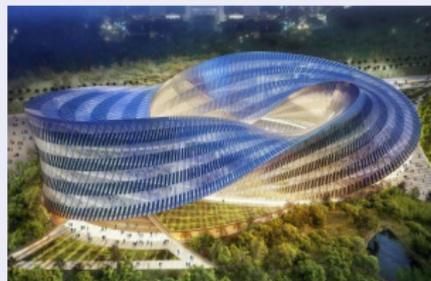
Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Matematico: *Facciamo altri esempi*

Moebius Strip Building a Taiwan



Architetto: *Carino, sembra difficile orientarsi lì dentro.*

Matematico: *Vedo che mi vuoi anticipare: di orientazione ne parleremo dopo.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

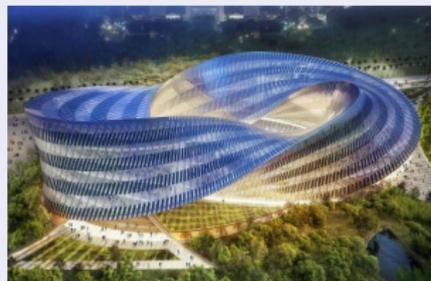
Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Matematico: *Facciamo altri esempi*

Moebius Strip Building a Taiwan



Architetto: *Carino, sembra difficile orientarsi lì dentro.*

Matematico: *Vedo che mi vuoi anticipare: di orientazione ne parleremo dopo.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

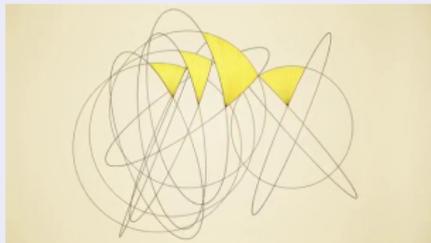
Che cosa è una superficie?

Matematico: *Torniamo a noi. Conosci il teatro dell'opera di Sydney?*

Architetto: *Certamente!*

Matematico: *Ecco, la forma del teatro è costruita pensando a pezzi di superficie. La sfera, volendo essere precisi.*

Sidney Opera Hall



Che cosa è una superficie?

Architetto: *Stai dicendo che conoscere le superfici potrebbe persino aiutarmi nello studio dell'architettura?*

Matematico: *Questo lo stai dicendo tu. Magari potrebbe esserti utile per comprendere meglio la forma di alcune strutture architettoniche e forse potrebbe fornirti ispirazione un giorno. Tutto può essere di ispirazione.*



Figura: L'ispirazione di Frank Gehry ne *I Simpson*.

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Architetto: *Faccio un'obiezione: non mi hai ancora risposto. Cos'è una superficie?*

Matematico: *Temo di non poter rispondere correttamente a questa domanda senza usare i giusti strumenti matematici. Potremmo partire da come si costruiscono le superfici.*

Architetto: *Cioè? Spiegati meglio.*

Matematico: *Supponiamo di prendere un foglio di carta o di cartoncino. Disegniamo un poligono regolare di $4n$ -lati, con n numero naturale qualunque. Adesso ritagliamolo e iniziamo a incollare coppie di lati.*

Architetto: *Mi sembri Giovanni Mucciaccia. Questo è un Art Attack!*

Matematico: *Torna serio per un momento, per favore.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Architetto: *Faccio un'obiezione: non mi hai ancora risposto. Cos'è una superficie?*

Matematico: *Temo di non poter rispondere correttamente a questa domanda senza usare i giusti strumenti matematici. Potremmo partire da come si costruiscono le superfici.*

Architetto: *Cioè? Spiegati meglio.*

Matematico: *Supponiamo di prendere un foglio di carta o di cartoncino. Disegniamo un poligono regolare di $4n$ -lati, con n numero naturale qualunque. Adesso ritagliamolo e iniziamo a incollare coppie di lati.*

Architetto: *Mi sembri Giovanni Mucciaccia. Questo è un Art Attack!*

Matematico: *Torna serio per un momento, per favore.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Architetto: *Faccio un'obiezione: non mi hai ancora risposto. Cos'è una superficie?*

Matematico: *Temo di non poter rispondere correttamente a questa domanda senza usare i giusti strumenti matematici. Potremmo partire da come si costruiscono le superfici.*

Architetto: *Cioè? Spiegati meglio.*

Matematico: *Supponiamo di prendere un foglio di carta o di cartoncino. Disegniamo un poligono regolare di $4n$ -lati, con n numero naturale qualunque. Adesso ritagiamolo e iniziamo a incollare coppie di lati.*

Architetto: *Mi sembri Giovanni Mucciaccia. Questo è un Art Attack!*

Matematico: *Torna serio per un momento, per favore.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Architetto: *Faccio un'obiezione: non mi hai ancora risposto. Cos'è una superficie?*

Matematico: *Temo di non poter rispondere correttamente a questa domanda senza usare i giusti strumenti matematici. Potremmo partire da come si costruiscono le superfici.*

Architetto: *Cioè? Spiegati meglio.*

Matematico: *Supponiamo di prendere un foglio di carta o di cartoncino. Disegniamo un poligono regolare di $4n$ -lati, con n numero naturale qualunque. Adesso ritagliamolo e iniziamo a incollare coppie di lati.*

Architetto: *Mi sembri Giovanni Mucciaccia. Questo è un Art Attack!*

Matematico: *Torna serio per un momento, per favore.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Architetto: *Faccio un'obiezione: non mi hai ancora risposto. Cos'è una superficie?*

Matematico: *Temo di non poter rispondere correttamente a questa domanda senza usare i giusti strumenti matematici. Potremmo partire da come si costruiscono le superfici.*

Architetto: *Cioè? Spiegati meglio.*

Matematico: *Supponiamo di prendere un foglio di carta o di cartoncino. Disegniamo un poligono regolare di $4n$ -lati, con n numero naturale qualunque. Adesso ritagliamolo e iniziamo a incollare coppie di lati.*

Architetto: *Mi sembri Giovanni Mucciaccia. Questo è un Art Attack!*

Matematico: *Torna serio per un momento, per favore.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Che cosa è una superficie?

Architetto: *Faccio un'obiezione: non mi hai ancora risposto. Cos'è una superficie?*

Matematico: *Temo di non poter rispondere correttamente a questa domanda senza usare i giusti strumenti matematici. Potremmo partire da come si costruiscono le superfici.*

Architetto: *Cioè? Spiegati meglio.*

Matematico: *Supponiamo di prendere un foglio di carta o di cartoncino. Disegniamo un poligono regolare di $4n$ -lati, con n numero naturale qualunque. Adesso ritagliamolo e iniziamo a incollare coppie di lati.*

Architetto: *Mi sembri Giovanni Mucciaccia. Questo è un Art Attack!*

Matematico: *Torna serio per un momento, per favore.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Costruzione di superfici

Primo esempio di superficie: nastro di Moebius

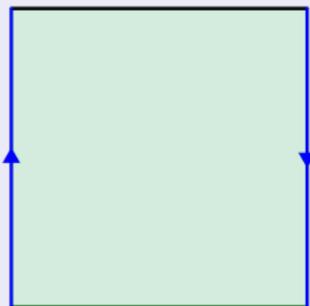


Figura: Identificazione lati di un quadrato

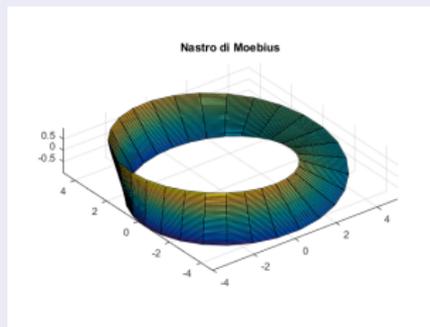


Figura: Il nastro di Moebius: superficie ottenuta dall'incollamento dei lati

Secondo esempio di superficie: il toro

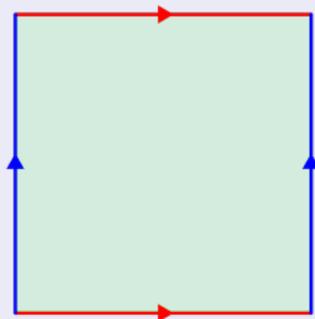


Figura: Identificazione lati di un quadrato

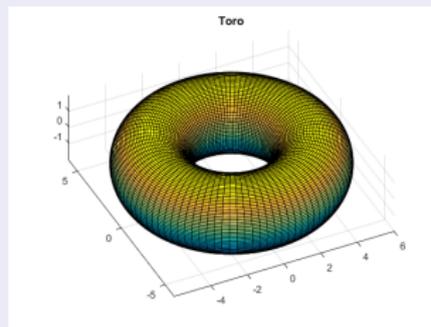


Figura: Il toro: superficie ottenuta dall'incollamento dei lati

Terzo esempio di superficie: la bottiglia di Klein

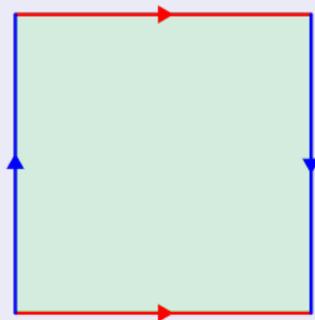


Figura: Identificazione lati di un quadrato

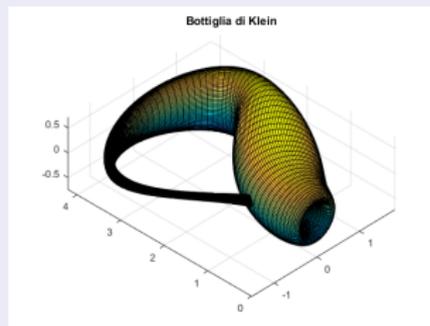


Figura: La bottiglia di Klein: superficie ottenuta dall'incollamento dei lati

Costruzione di superfici

Architetto: *Interessante. Posso prendere un poligono con qualunque numero di lati? Posso identificare i lati come voglio?*

Matematico: *Come in ogni gioco che si rispetti ci sono delle regole.*

Costruzione delle superfici

Tutte le superfici **chiuse e orientabili** sono ottenibili incollando i lati di un poligono regolare di $4n$ lati con lo schema di incollamento indicato in figura. Analogamente **tutte** le superfici **chiuse e non orientabili** sono ottenibili incollando i lati di un poligono regolare di $2n$ lati con lo schema di incollamento riportato in figura.

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Costruzione di superfici

Architetto: *Interessante. Posso prendere un poligono con qualunque numero di lati? Posso identificare i lati come voglio?*

Matematico: *Come in ogni gioco che si rispetti ci sono delle regole.*

Costruzione delle superfici

Tutte le superfici **chiuse e orientabili** sono ottenibili incollando i lati di un poligono regolare di $4n$ lati con lo schema di incollamento indicato in figura. Analogamente **tutte** le superfici **chiuse e non orientabili** sono ottenibili incollando i lati di un poligono regolare di $2n$ lati con lo schema di incollamento riportato in figura.

Costruzione di superfici

Costruzione delle superfici orientabili

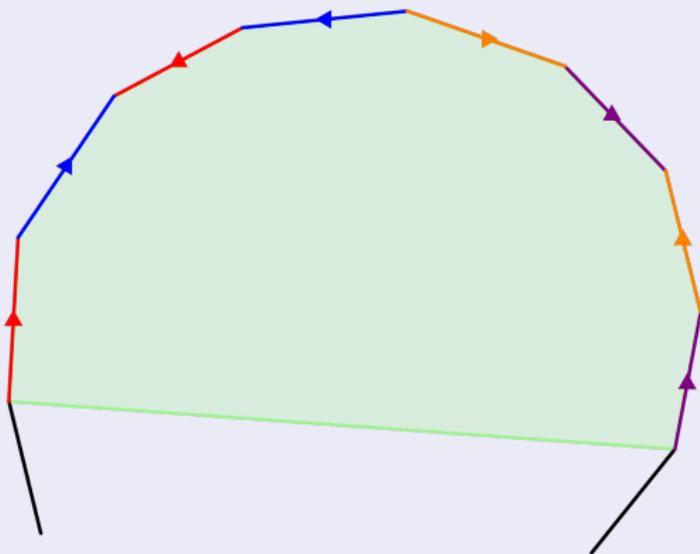


Figura: Identificazione lati per superfici orientabili

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Costruzione di superfici

Costruzione delle superfici non orientabili

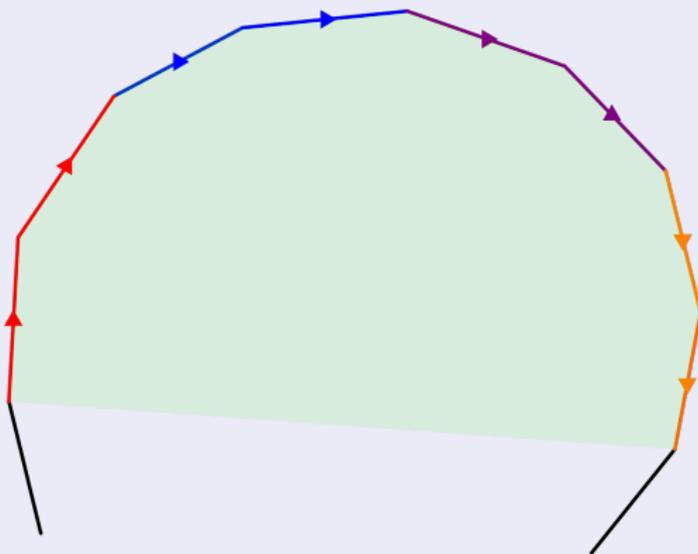


Figura: Identificazione lati per superfici non orientabili

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Costruzione di superfici

Architetto:



*Cosa vuol dire **tutte**? Che senso ha parlare di superfici **orientabili e non orientabili**? Che cos'è una superficie **chiusa**?*

Matematico: Vedo che mi ascolti quando parlo. Andiamo con ordine.

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiusa

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Costruzione di superfici

Architetto:



*Cosa vuol dire **tutte**? Che senso ha parlare di superfici **orientabili e non orientabili**? Che cos'è una superficie **chiusa**?*

***Matematico:** Vedo che mi ascolti quando parlo. Andiamo con ordine.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiusa

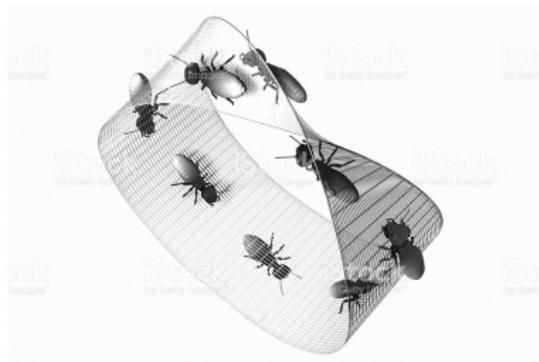
Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Superfici orientabili e non orientabili

Matematico: *Una superficie si dice **non orientabile** se, dopo aver camminato lungo una curva chiusa che giace sulla superficie, mi ritrovo in posizione ribaltata rispetto alla posizione iniziale. Questo ad esempio succede lungo una curva sul nastro di Moebius. Se questo non accade si dice che la superficie è **orientabile**.*



Superfici chiuse

Architetto : *Ok, con il concetto di orientabilità ci siamo. Cosa vuol dire che una superficie è chiusa?*

Matematico: *Proseguiamo nel nostro esempio e continuiamo a supporre di camminare su una qualche superficie. Di fronte a noi c'è un sassolino. Sarebbe scortese non tirare un calcio al sasso. Questo, dopo il calcio, avanzerà rispetto la nostra posizione. Se continuando a calciare il sasso, giungiamo in una posizione, in cui calciando il sasso, questo cade scomparendo nel vuoto, abbiamo raggiunto il bordo della superficie. Diremo che una superficie con questa proprietà è dotata di **bordo**. Se il sasso non scompare mai, la superficie è **priva di bordo**. Una superficie si dice **chiusa** se è senza bordo e soddisfa un'altra condizione di finitezza (detta compattezza).*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Architetto : *Ok, con il concetto di orientabilità ci siamo. Cosa vuol dire che una superficie è chiusa?*

Matematico: *Proseguiamo nel nostro esempio e continuiamo a supporre di camminare su una qualche superficie. Di fronte a noi c'è un sassolino. Sarebbe scortese non tirare un calcio al sasso. Questo, dopo il calcio, avanzerà rispetto la nostra posizione. Se continuando a calciare il sasso, giungiamo in una posizione, in cui calciando il sasso, questo cade scomparendo nel vuoto, abbiamo raggiunto il bordo della superficie. Diremo che una superficie con questa proprietà è dotata di **bordo**. Se il sasso non scompare mai, la superficie è **priva di bordo**. Una superficie si dice **chiusa** se è senza bordo e soddisfa un'altra condizione di finitezza (detta compattezza).*

Superfici con bordo

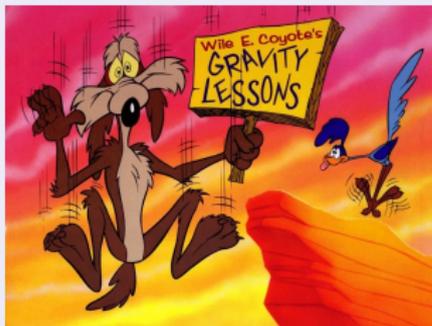


Figura: Quando raggiungi il bordo di una superficie

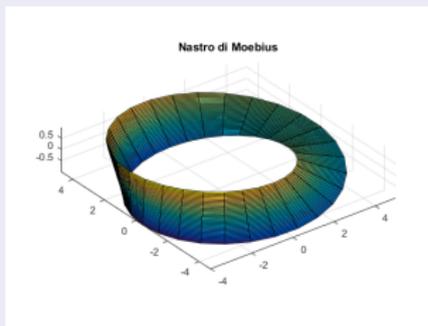


Figura: Esempio di superficie con bordo

Classificazione delle superfici

Architetto: *Ormai ci siamo. Cosa vuol dire tutte le superfici?*

Matematico: *I matematici sono limitati e sentono un bisogno interiore di raggruppare gli oggetti di studio utilizzando le loro proprietà comuni. Pensiamo alle macchine: ancor prima di distinguere per marca, abbiamo differenti tipologie come macchina familiare, utilitaria, SUV, crossover, coupé ...*

Tipi di classificazione

Le possibili classificazioni delle superfici sono

- **Topologica**
- **Metrica**
- Altro che non citeremo

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *Ormai ci siamo. Cosa vuol dire tutte le superfici?*

Matematico: *I matematici sono limitati e sentono un bisogno interiore di raggruppare gli oggetti di studio utilizzando le loro proprietà comuni. Pensiamo alle macchine: ancor prima di distinguere per marca, abbiamo differenti tipologie come macchina familiare, utilitaria, SUV, crossover, coupé ...*

Tipi di classificazione

Le possibili classificazioni delle superfici sono

- **Topologica**
- **Metrica**
- Altro che non citeremo

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *Ormai ci siamo. Cosa vuol dire tutte le superfici?*

Matematico: *I matematici sono limitati e sentono un bisogno interiore di raggruppare gli oggetti di studio utilizzando le loro proprietà comuni. Pensiamo alle macchine: ancor prima di distinguere per marca, abbiamo differenti tipologie come macchina familiare, utilitaria, SUV, crossover, coupé ...*

Tipi di classificazione

Le possibili classificazioni delle superfici sono

- **Topologica**
- **Metrica**
- Altro che non citeremo

Classificazione delle superfici

Architetto: *È già la seconda volta che parli di topologia. Cosa vuol dire topologia?*

Matematico: *Decisamente difficile da definire. Hai mai giocato col das o col didò?*

Architetto: *Sì, ma non vedo questo come possa aiutare.*

Matematico: *E invece ci aiuta. La **topologia** studia deformazioni continue di spazi. Supponiamo di avere un oggetto fatto interamente di didò. Potrai stirare, tendere, stropicciare il tuo oggetto, mentre sarà vietato tagliare, bucare o incollare impropriamente altro didò.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *È già la seconda volta che parli di topologia. Cosa vuol dire topologia?*

Matematico: *Decisamente difficile da definire. Hai mai giocato col das o col didò?*

Architetto: *Sì, ma non vedo questo come possa aiutare.*

Matematico: *E invece ci aiuta. La **topologia** studia deformazioni continue di spazi. Supponiamo di avere un oggetto fatto interamente di didò. Potrai stirare, tendere, stropicciare il tuo oggetto, mentre sarà vietato tagliare, bucare o incollare impropriamente altro didò.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *È già la seconda volta che parli di topologia. Cosa vuol dire topologia?*

Matematico: *Decisamente difficile da definire. Hai mai giocato col das o col didò?*

Architetto: *Sì, ma non vedo questo come possa aiutare.*

Matematico: *E invece ci aiuta. La **topologia** studia deformazioni continue di spazi. Supponiamo di avere un oggetto fatto interamente di didò. Potrai stirare, tendere, stropicciare il tuo oggetto, mentre sarà vietato tagliare, bucare o incollare impropriamente altro didò.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *È già la seconda volta che parli di topologia. Cosa vuol dire topologia?*

Matematico: *Decisamente difficile da definire. Hai mai giocato col das o col didò?*

Architetto: *Sì, ma non vedo questo come possa aiutare.*

Matematico: *E invece ci aiuta. La **topologia** studia deformazioni continue di spazi. Supponiamo di avere un oggetto fatto interamente di didò. Potrai stirare, tendere, stropicciare il tuo oggetto, mentre sarà vietato tagliare, bucare o incollare impropriamente altro didò.*

Classificazione delle superfici

Architetto: *Mi riesce un po' ostico seguirti. Avrei bisogno come sempre di un esempio visivo.*

Matematico: *Ogni tuo desiderio è un ordine.*

Esempio di deformazione topologica

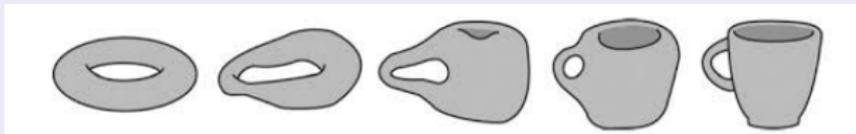


Figura: Deformazione continua di un toro in una tazza

Classificazione delle superfici

Architetto: *Quindi cosa significa in questo caso raggruppare le superfici secondo le loro proprietà topologiche?*

Matematico: *Due superfici si diranno **topologicamente equivalenti** se esiste una deformazione topologica che permette di passare dall'una all'altra e viceversa. Se possiamo cioè deformare con continuità la prima per ottenere la seconda. È un po' come con i gemelli omozigoti. Sappiamo benissimo che sono due persone diverse, ma hanno talmente tante caratteristiche comuni che non riusciamo a distinguerli.*

Architetto: *Due superfici topologicamente equivalenti sono gemelle?*

Matematico: *Bravo! Questa si chiama **classificazione topologica delle superfici**.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *Quindi cosa significa in questo caso raggruppare le superfici secondo le loro proprietà topologiche?*

Matematico: *Due superfici si diranno **topologicamente equivalenti** se esiste una deformazione topologica che permette di passare dall'una all'altra e viceversa. Se possiamo cioè deformare con continuità la prima per ottenere la seconda. È un po' come con i gemelli omozigoti. Sappiamo benissimo che sono due persone diverse, ma hanno talmente tante caratteristiche comuni che non riusciamo a distinguerli.*

Architetto: *Due superfici topologicamente equivalenti sono gemelle?*

Matematico: *Bravo! Questa si chiama **classificazione topologica delle superfici**.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *Quindi cosa significa in questo caso raggruppare le superfici secondo le loro proprietà topologiche?*

Matematico: *Due superfici si diranno **topologicamente equivalenti** se esiste una deformazione topologica che permette di passare dall'una all'altra e viceversa. Se possiamo cioè deformare con continuità la prima per ottenere la seconda. È un po' come con i gemelli omozigoti. Sappiamo benissimo che sono due persone diverse, ma hanno talmente tante caratteristiche comuni che non riusciamo a distinguerli.*

Architetto: *Due superfici topologicamente equivalenti sono gemelle?*

Matematico: *Bravo! Questa si chiama **classificazione topologica delle superfici**.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *Quindi cosa significa in questo caso raggruppare le superfici secondo le loro proprietà topologiche?*

Matematico: *Due superfici si diranno **topologicamente equivalenti** se esiste una deformazione topologica che permette di passare dall'una all'altra e viceversa. Se possiamo cioè deformare con continuità la prima per ottenere la seconda. È un po' come con i gemelli omozigoti. Sappiamo benissimo che sono due persone diverse, ma hanno talmente tante caratteristiche comuni che non riusciamo a distinguerli.*

Architetto: *Due superfici topologicamente equivalenti sono gemelle?*

Matematico: *Bravo! Questa si chiama **classificazione topologica** delle superfici.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Matematico: *Se vogliamo riepilogare quanto detto finora*

Costruzione/Classificazione delle superfici

Incollando i lati di un poligono regolare di $4n$ lati con lo schema di incollamento indicato in figura è possibile ottenere tutte le superfici chiuse e orientabili. Analogamente tutte le superfici chiuse e non orientabili sono ottenibili incollando i lati di un poligono regolare di $2n$ lati con lo schema di incollamento riportato in figura. In entrambi i casi si assume di identificare fra loro superfici topologicamente equivalenti.

Classificazione delle superfici

Matematico: *Se vogliamo riepilogare quanto detto finora*

Costruzione/Classificazione delle superfici

Incollando i lati di un poligono regolare di $4n$ lati con lo schema di incollamento indicato in figura è possibile ottenere tutte le superfici chiuse e orientabili. Analogamente tutte le superfici chiuse e non orientabili sono ottenibili incollando i lati di un poligono regolare di $2n$ lati con lo schema di incollamento riportato in figura. In entrambi i casi si assume di identificare fra loro superfici topologicamente equivalenti.

Classificazione delle superfici

Architetto: *Inizio a capirci qualcosa. Ma non sono ancora soddisfatto. In fin dei conti mi hai dato un poligono su un piano. C'è modo di sapere il prodotto finale che otterrò una volta identificati i lati?*

Matematico: *Certamente. Ma riesco a mostrarti solo le superfici chiuse orientabili. Quelle non orientabili hanno un problema di immergibilità.*

Architetto: *Che cosa c'entra adesso l'acqua?*

Matematico: *Scusa, errore mio. Intendo dire che, data la loro complessità nel disegnarle, non riusciamo a visualizzare le superfici chiuse non orientabili.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Classificazione delle superfici

Architetto: *Inizio a capirci qualcosa. Ma non sono ancora soddisfatto. In fin dei conti mi hai dato un poligono su un piano. C'è modo di sapere il prodotto finale che otterrò una volta identificati i lati?*

Matematico: *Certamente. Ma riesco a mostrarti solo le superfici chiuse orientabili. Quelle non orientabili hanno un problema di immergibilità.*

Architetto: *Che cosa c'entra adesso l'acqua?*

Matematico: *Scusa, errore mio. Intendo dire che, data la loro complessità nel disegnarle, non riusciamo a visualizzare le superfici chiuse non orientabili.*

Classificazione delle superfici

Architetto: *Inizio a capirci qualcosa. Ma non sono ancora soddisfatto. In fin dei conti mi hai dato un poligono su un piano. C'è modo di sapere il prodotto finale che otterrò una volta identificati i lati?*

Matematico: *Certamente. Ma riesco a mostrarti solo le superfici chiuse orientabili. Quelle non orientabili hanno un problema di immergibilità.*

Architetto: *Che cosa c'entra adesso l'acqua?*

Matematico: *Scusa, errore mio. Intendo dire che, data la loro complessità nel disegnarle, non riusciamo a visualizzare le superfici chiuse non orientabili.*

Classificazione delle superfici

Architetto: *Inizio a capirci qualcosa. Ma non sono ancora soddisfatto. In fin dei conti mi hai dato un poligono su un piano. C'è modo di sapere il prodotto finale che otterrò una volta identificati i lati?*

Matematico: *Certamente. Ma riesco a mostrarti solo le superfici chiuse orientabili. Quelle non orientabili hanno un problema di immergibilità.*

Architetto: *Che cosa c'entra adesso l'acqua?*

Matematico: *Scusa, errore mio. Intendo dire che, data la loro complessità nel disegnarle, non riusciamo a visualizzare le superfici chiuse non orientabili.*

Classificazione delle superfici orientabili

Classificazione delle superfici orientabili

Ecco una lista completa delle superfici chiuse orientabili.

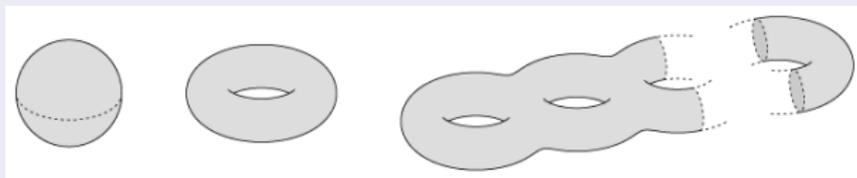


Figura: Classificazione delle superfici orientabili

Proprietà metriche delle superfici

Architetto: *Finora hai parlato di classificazione topologica delle superfici. Ma prima hai citato anche la classificazione metrica? Di cosa si tratta?*

Matematico: *Le proprietà metriche di una superficie sono un argomento più delicato da trattare. Potremmo fare un paragone sportivo. Prendiamo una palla da bowling, una da tennis e una da ping pong. La forma di tutte queste palle da gioco è una sfera, giusto? Ma non giocheresti mai a bowling con una pallina da tennis!*

Architetto: *Cosa stai cercando di dirmi?*

Matematico: *Voglio dirti che se in precedenza tutte queste palle corrispondevano a superfici topologicamente equivalenti (la sfera), se ci soffermiamo sulle loro proprietà metriche dovremo necessariamente distinguerle (per le loro dimensioni, ad esempio).*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Architetto: *Finora hai parlato di classificazione topologica delle superfici. Ma prima hai citato anche la classificazione metrica? Di cosa si tratta?*

Matematico: *Le proprietà metriche di una superficie sono un argomento più delicato da trattare. Potremmo fare un paragone sportivo. Prendiamo una palla da bowling, una da tennis e una da ping pong. La forma di tutte queste palle da gioco è una sfera, giusto? Ma non giocheresti mai a bowling con una pallina da tennis!*

Architetto: *Cosa stai cercando di dirmi?*

Matematico: *Voglio dirti che se in precedenza tutte queste palle corrispondevano a superfici topologicamente equivalenti (la sfera), se ci soffermiamo sulle loro proprietà metriche dovremo necessariamente distinguerle (per le loro dimensioni, ad esempio).*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Architetto: *Finora hai parlato di classificazione topologica delle superfici. Ma prima hai citato anche la classificazione metrica? Di cosa si tratta?*

Matematico: *Le proprietà metriche di una superficie sono un argomento più delicato da trattare. Potremmo fare un paragone sportivo. Prendiamo una palla da bowling, una da tennis e una da ping pong. La forma di tutte queste palle da gioco è una sfera, giusto? Ma non giocheresti mai a bowling con una pallina da tennis!*

Architetto: *Cosa stai cercando di dirmi?*

Matematico: *Voglio dirti che se in precedenza tutte queste palle corrispondevano a superfici topologicamente equivalenti (la sfera), se ci soffermiamo sulle loro proprietà metriche dovremo necessariamente distinguerle (per le loro dimensioni, ad esempio).*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Architetto: *Finora hai parlato di classificazione topologica delle superfici. Ma prima hai citato anche la classificazione metrica? Di cosa si tratta?*

Matematico: *Le proprietà metriche di una superficie sono un argomento più delicato da trattare. Potremmo fare un paragone sportivo. Prendiamo una palla da bowling, una da tennis e una da ping pong. La forma di tutte queste palle da gioco è una sfera, giusto? Ma non giocheresti mai a bowling con una pallina da tennis!*

Architetto: *Cosa stai cercando di dirmi?*

Matematico: *Voglio dirti che se in precedenza tutte queste palle corrispondevano a superfici topologicamente equivalenti (la sfera), se ci soffermiamo sulle loro proprietà metriche dovremo necessariamente distinguerle (per le loro dimensioni, ad esempio).*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Matematico: *Dare una **struttura metrica** a una superficie, significa poter parlare di*

- *distanza fra punti,*
- *misura di un angolo,*
- *misura di un'area,*
- *etc...*

Architetto: *Quindi, se capisco bene, quando misuriamo la distanza fra due città come Roma e Dubai stiamo supponendo di assegnare una struttura metrica alla superficie terrestre, ovvero alla sfera?*

Matematico: *Esattamente!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Matematico: *Dare una **struttura metrica** a una superficie, significa poter parlare di*

- *distanza fra punti,*
- *misura di un angolo,*
- *misura di un'area,*
- *etc...*

Architetto: *Quindi, se capisco bene, quando misuriamo la distanza fra due città come Roma e Dubai stiamo supponendo di assegnare una struttura metrica alla superficie terrestre, ovvero alla sfera?*

Matematico: *Esattamente!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Matematico: *Dare una **struttura metrica** a una superficie, significa poter parlare di*

- *distanza fra punti,*
- *misura di un angolo,*
- *misura di un'area,*
- *etc...*

Architetto: *Quindi, se capisco bene, quando misuriamo la distanza fra due città come Roma e Dubai stiamo supponendo di assegnare una struttura metrica alla superficie terrestre, ovvero alla sfera?*

Matematico: *Esattamente!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Struttura metrica sulla superficie terrestre

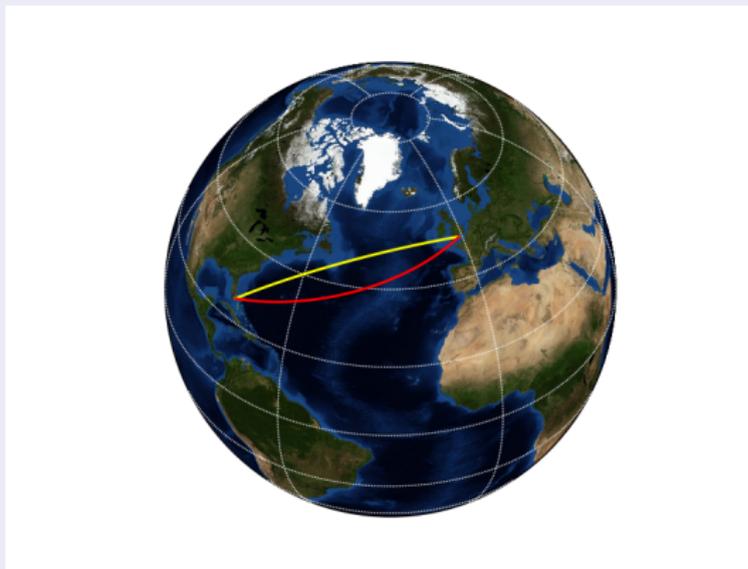


Figura: Come misurare la distanza fra due città

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Matematico: *Una volta assegnata una struttura metrica a una superficie, potremo parlare di superfici **metricamente equivalenti**. Due superfici S e S' saranno metricamente equivalenti se esiste una funzione biettiva $F : S \rightarrow S'$ che preserva le distanze fra punti, ovvero $d(x, y) = d(F(x), F(y))$ per tutti i punti $x, y \in S$.*

Architetto: *A parte le astrusità matematiche, sembra una condizione decisamente più restrittiva dell'equivalenza topologica...*

Matematico: *Lo è infatti. Due sfere di raggio diverso, saranno topologicamente equivalenti ma non metricamente equivalenti!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Proprietà metriche delle superfici

Matematico: *Una volta assegnata una struttura metrica a una superficie, potremo parlare di superfici **metricamente equivalenti**. Due superfici S e S' saranno metricamente equivalenti se esiste una funzione biettiva $F : S \rightarrow S'$ che preserva le distanze fra punti, ovvero $d(x, y) = d(F(x), F(y))$ per tutti i punti $x, y \in S$.*

Architetto: *A parte le astrusità matematiche, sembra una condizione decisamente più restrittiva dell'equivalenza topologica...*

Matematico: *Lo è infatti. Due sfere di raggio diverso, saranno topologicamente equivalenti ma non metricamente equivalenti!*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Matematico: *Una volta assegnata una struttura metrica a una superficie, potremo parlare di superfici **metricamente equivalenti**. Due superfici S e S' saranno metricamente equivalenti se esiste una funzione biettiva $F : S \rightarrow S'$ che preservi la distanza fra punti, ovvero $d(x, y) = d(F(x), F(y))$ per tutti i punti $x, y \in S$.*

Architetto: *A parte le astrusità matematiche, sembra una condizione decisamente più restrittiva dell'equivalenza topologica...*

Matematico: *Lo è infatti. Due sfere di raggio diverso, saranno topologicamente equivalenti ma non metricamente equivalenti!*

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Inizio a comprendere. Siccome l'appetito vien mangiando, se volessi studiare più nel dettaglio queste superfici?*

Matematico: *Potresti partire studiando il toro o la sfera. Ti farebbe comodo una parametrizzazione?*

Architetto: *Una cosa?*

Matematico: *Torniamo a camminare sulle superfici. Anzi andiamo in macchina.*

Architetto: *Cosa è questa fissa di muoversi sulle superfici?*

Matematico: *Aiuta a semplificare. Supponiamo di avere un'avaria alla macchina mentre siamo in viaggio. Una volta chiamati i soccorsi, questi chiedono la nostra posizione. Tu cosa diresti?*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Inizio a comprendere. Siccome l'appetito vien mangiando, se volessi studiare più nel dettaglio queste superfici?*

Matematico: *Potresti partire studiando il toro o la sfera. Ti farebbe comodo una parametrizzazione?*

Architetto: *Una cosa?*

Matematico: *Torniamo a camminare sulle superfici. Anzi andiamo in macchina.*

Architetto: *Cosa è questa fissa di muoversi sulle superfici?*

Matematico: *Aiuta a semplificare. Supponiamo di avere un'avaria alla macchina mentre siamo in viaggio. Una volta chiamati i soccorsi, questi chiedono la nostra posizione. Tu cosa diresti?*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Inizio a comprendere. Siccome l'appetito vien mangiando, se volessi studiare più nel dettaglio queste superfici?*

Matematico: *Potresti partire studiando il toro o la sfera. Ti farebbe comodo una parametrizzazione?*

Architetto: *Una cosa?*

Matematico: *Torniamo a camminare sulle superfici. Anzi andiamo in macchina.*

Architetto: *Cosa è questa fissa di muoversi sulle superfici?*

Matematico: *Aiuta a semplificare. Supponiamo di avere un'avaria alla macchina mentre siamo in viaggio. Una volta chiamati i soccorsi, questi chiedono la nostra posizione. Tu cosa diresti?*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Inizio a comprendere. Siccome l'appetito vien mangiando, se volessi studiare più nel dettaglio queste superfici?*

Matematico: *Potresti partire studiando il toro o la sfera. Ti farebbe comodo una parametrizzazione?*

Architetto: *Una cosa?*

Matematico: *Torniamo a camminare sulle superfici. Anzi andiamo in macchina.*

Architetto: *Cosa è questa fissa di muoversi sulle superfici?*

Matematico: *Aiuta a semplificare. Supponiamo di avere un'avaria alla macchina mentre siamo in viaggio. Una volta chiamati i soccorsi, questi chiedono la nostra posizione. Tu cosa diresti?*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Inizio a comprendere. Siccome l'appetito vien mangiando, se volessi studiare più nel dettaglio queste superfici?*

Matematico: *Potresti partire studiando il toro o la sfera. Ti farebbe comodo una parametrizzazione?*

Architetto: *Una cosa?*

Matematico: *Torniamo a camminare sulle superfici. Anzi andiamo in macchina.*

Architetto: *Cosa è questa fissa di muoversi sulle superfici?*

Matematico: *Aiuta a semplificare. Supponiamo di avere un'avaria alla macchina mentre siamo in viaggio. Una volta chiamati i soccorsi, questi chiedono la nostra posizione. Tu cosa diresti?*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Inizio a comprendere. Siccome l'appetito vien mangiando, se volessi studiare più nel dettaglio queste superfici?*

Matematico: *Potresti partire studiando il toro o la sfera. Ti farebbe comodo una parametrizzazione?*

Architetto: *Una cosa?*

Matematico: *Torniamo a camminare sulle superfici. Anzi andiamo in macchina.*

Architetto: *Cosa è questa fissa di muoversi sulle superfici?*

Matematico: *Aiuta a semplificare. Supponiamo di avere un'avaria alla macchina mentre siamo in viaggio. Una volta chiamati i soccorsi, questi chiedono la nostra posizione. Tu cosa diresti?*

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Se dico che mi trovo su una superficie, temo mi prendano per pazzo. Se mi perdessi in un bosco e avessi modo, trasmetterei le mie coordinate. Longitudine e latitudine.*

Matematico: *Hai detto le parole magiche, anche se in maniera imprecisa. Diciamo che conoscere longitudine e latitudine sulla sfera permette di individuare le nostre coordinate e quindi la nostra posizione. Una parametrizzazione è un meccanismo simile nel caso di superfici.*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Parametrizzazione di una superficie

Architetto: *Se dico che mi trovo su una superficie, temo mi prendano per pazzo. Se mi perdessi in un bosco e avessi modo, trasmetterei le mie coordinate. Longitudine e latitudine.*

Matematico: *Hai detto le parole magiche, anche se in maniera imprecisa. Diciamo che conoscere longitudine e latitudine sulla sfera permette di individuare le nostre coordinate e quindi la nostra posizione. Una parametrizzazione è un meccanismo simile nel caso di superfici.*

Parametrizzazione di una superficie

Parametrizzazione della sfera di raggio r

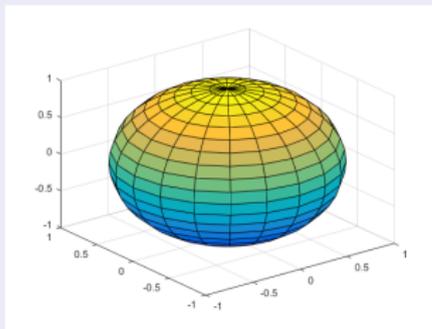


Figura: Sfera

Parametrizzazione della sfera in \mathbb{R}^3 .

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) = r \cos(\theta) \cos(\phi), \\ y(\theta, \phi) = r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ z(\theta, \phi) = r \sin(\phi). \end{cases}$$

Parametrizzazione di una superficie

Parametrizzazione del toro di raggio r_1 e r_2

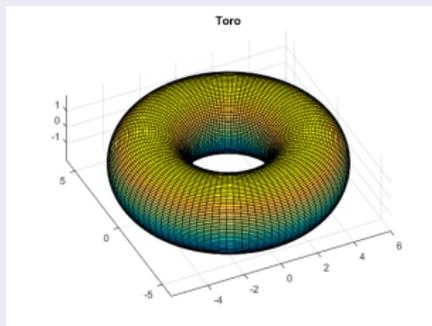


Figura: Toro

Parametrizzazione del toro in \mathbb{R}^3 .

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) = (r_1 \cos(\theta) + r_2) \cos(\phi), \\ y(\theta, \phi) = (r_1 \sin(\theta) + r_2) \cos(\phi), \\ z(\theta, \phi) = r_2 \sin(\phi). \end{cases}$$

Tipologie di punti su una superficie

Matematico: *Oltre a una parametrizzazione potresti studiare i punti della tua superficie. Ne esistono 4 diverse tipologie.*

Architetto: *Immagino mi propinerai altre definizioni incomprensibili...*

Matematico: *Abbi un po' di fiducia. Finora non mi sembrava di essere andato male... Tornando a noi, i punti di una superficie (immersa, detto fra i denti in modo che nessuno ci senta) sono distinguibili in*

- **punti ellittici**
- **punti iperbolici**
- **punti parabolici**
- **punti planari**

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Tipologie di punti su una superficie

Matematico: *Oltre a una parametrizzazione potresti studiare i punti della tua superficie. Ne esistono 4 diverse tipologie.*

Architetto: *Immagino mi propinerai altre definizioni incomprensibili...*

Matematico: *Abbi un po' di fiducia. Finora non mi sembrava di essere andato male... Tornando a noi, i punti di una superficie (immersa, detto fra i denti in modo che nessuno ci senta) sono distinguibili in*

- *punti ellittici*
- *punti iperbolici*
- *punti parabolici*
- *punti planari*

Geometria e
Topologia
delle superfici

Alessio

Che cosa è
una
superficie?

Costruzione di
superfici

Superfici
orientabili

Superfici
chiuse

Classificazione
delle superfici

Proprietà
metriche delle
superfici

Studio di una
superficie:
parametrizza-
zione e
punti

Tipologie di punti su una superficie

Matematico: *Oltre a una parametrizzazione potresti studiare i punti della tua superficie. Ne esistono 4 diverse tipologie.*

Architetto: *Immagino mi propinerai altre definizioni incomprensibili...*

Matematico: *Abbi un po' di fiducia. Finora non mi sembrava di essere andato male... Tornando a noi, i punti di una superficie (immersa, detto fra i denti in modo che nessuno ci senta) sono distinguibili in*

- **punti ellittici**
- **punti iperbolici**
- **punti parabolici**
- **punti planari**

Tipologie di punti su una superficie

Architetto: *Mi sembra una lista della spesa. Non potresti farmi qualche esempio come al solito?*

Matematico: *Certamente. Sempre pronto! Ma prima ho bisogno di sapere: conosci il piano tangente a una superficie in un punto?*

Architetto: *Così su due piedi ti direi di no, quindi ricordamelo, per favore.*

Matematico: *Il piano tangente a una superficie in un suo punto è il piano che meglio approssima la superficie in quel punto. Ricordati, ad esempio, la retta tangente a un punto nel caso di una circonferenza.*

Tipologie di punti su una superficie

Architetto: *Mi sembra una lista della spesa. Non potresti farmi qualche esempio come al solito?*

Matematico: *Certamente. Sempre pronto! Ma prima ho bisogno di sapere: conosci il piano tangente a una superficie in un punto?*

Architetto: *Così su due piedi ti direi di no, quindi ricordamelo, per favore.*

Matematico: *Il piano tangente a una superficie in un suo punto è il piano che meglio approssima la superficie in quel punto. Ricordati, ad esempio, la retta tangente a un punto nel caso di una circonferenza.*

Tipologie di punti su una superficie

Architetto: *Mi sembra una lista della spesa. Non potresti farmi qualche esempio come al solito?*

Matematico: *Certamente. Sempre pronto! Ma prima ho bisogno di sapere: conosci il piano tangente a una superficie in un punto?*

Architetto: *Così su due piedi ti direi di no, quindi ricordamelo, per favore.*

Matematico: *Il piano tangente a una superficie in un suo punto è il piano che meglio approssima la superficie in quel punto. Ricordati, ad esempio, la retta tangente a un punto nel caso di una circonferenza.*

Tipologie di punti su una superficie

Architetto: *Mi sembra una lista della spesa. Non potresti farmi qualche esempio come al solito?*

Matematico: *Certamente. Sempre pronto! Ma prima ho bisogno di sapere: conosci il piano tangente a una superficie in un punto?*

Architetto: *Così su due piedi ti direi di no, quindi ricordamelo, per favore.*

Matematico: *Il **piano tangente** a una superficie in un suo punto è il piano che meglio approssima la superficie in quel punto. Ricordati, ad esempio, la retta tangente a un punto nel caso di una circonferenza.*

Tipologie di punti su una superficie

Tipologie di punti

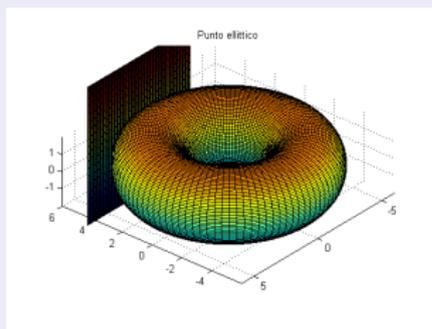


Figura: Punto ellittico

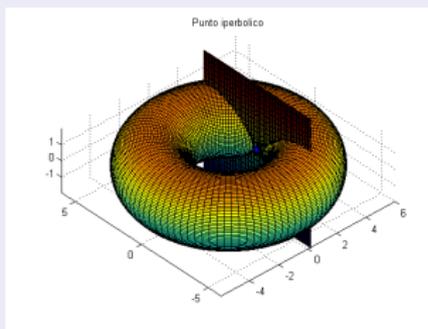


Figura: Punto iperbolico

Tipologie di punti su una superficie

Tipologie di punti

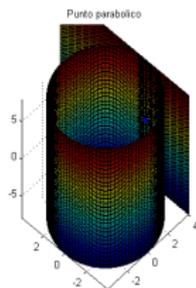


Figura: Punto parabolico

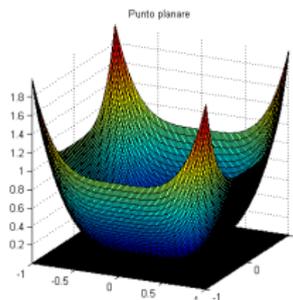


Figura: Punto planare

Architetto: *Sai che sto iniziando a divertirmi?*

Matematico: *Sono contento. Ci sarebbe molto altro da dire, ma temo il nostro tempo scarseggi.*

Grazie per l'attenzione

