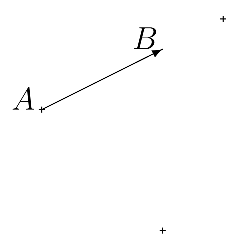
Analisi dei dati corso integrato - Algebra lineare, 19.02.08 - 20.02.08

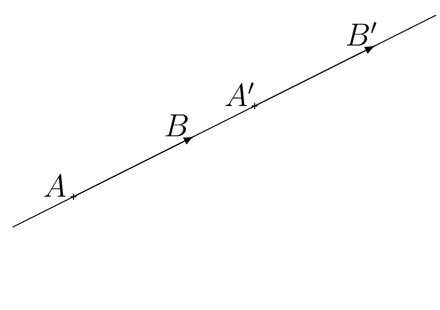
1. In questa lezione si riprendono, in modo informale e brevemente, alcune nozioni ed alcuni fatti sui vettori, cosi' come emergono nello studio della geometeria dello spazio.

   Dati due punti A e B nello spazio, indichiamo con AB il segmento che li congiunge, pensato con il verso di percorrenza privilegiato da A verso B.

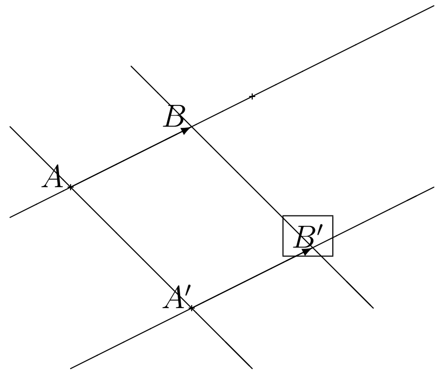
   Fissato un segmento orientato AB, per ogni punto A' dello spazio esiste uno ed un solo segmento orientato $A'B'$ con primo estremo A' che abbia la stessa lunghezza, direzione e verso di AB.



   Se A' e' sulla retta individuata da A e B, allora e' intuitivamente chiaro come possiamo costruire $A'B'$.



   Se A' non e' sulla retta individuata da A e B, allora possiamo costruire B' intersecando la retta per A' parallela alla retta per A, B con la retta per B parallela alla retta per A, A'.

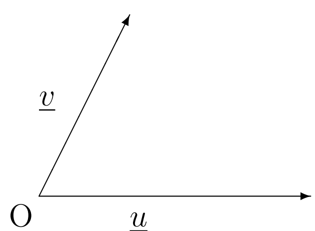


Diciamo che abbiamo "tralsato" il segmento orientato AB nel segmento orientato $A'B'$.

2. D'ora innanzi, al posto dell'espressione "segmento orientato con primo estremo in A" diremo "vettore applicato in A"; indicheremo i vettori applicati con simboli come $\underline{u}, \underline{v}, \ldots$.

   Sia O un punto fissato nello spazio.

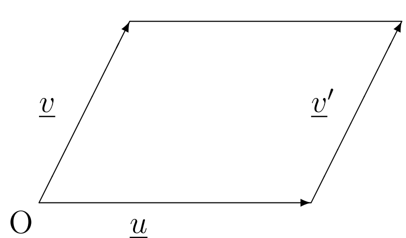
   Dati due vettori $\underline{u}, \underline{v}$ applicati in O,



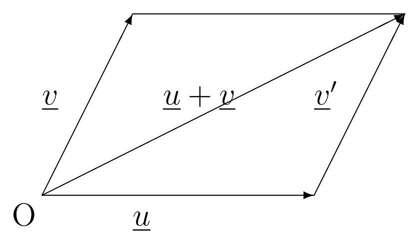
   definiamo il vettore

$$\underline{u} + \underline{v}$$

   loro somma come il vettore applicato in O costruito come segue: prima trasliamo il vettore $\underline{v}$ in modo che il suo primo estremo coincida col secondo estremo di $\underline{u}$, ottenendo cosi' un nuovo vettore $\underline{v}'$

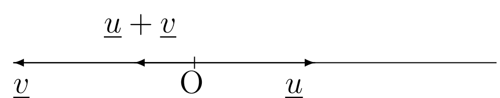


poi consideriamo il vettore applicato in O avente come secondo estremo il secondo estremo di $\underline{v}'$:



In altri termini, $\underline{u}+\underline{v}$ e' la diagonale, uscente da O, del parallelogramma che ammette $\underline{u}$ e $\underline{v}$ come lati consecutivi.

Nel caso di vettori allineati, la somma e' sostanzialmente quella dei numeri reali:



Questa operazione di addizione di vettori risulta essere associativa

$\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$,

e commutativa:

$(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$,

per ogni terna di vettori $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$.

Per esecizio, si verifichi graficamente su un esempio la proprieta' associativa.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore i cui estremi coincidono con il punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo

$$\underline{0}.$$

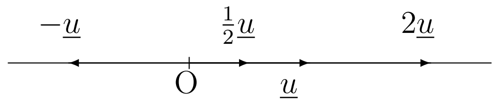
La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni $\underline{v}$, il suo simmetrico rispetto ad 0 viene indicato con

$$-\underline{v}.$$

3. Dato un vettore $\underline{v}$ applicato in O, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per $\underline{v}$: per un numero intero n, si pone

$$n\underline{v}=\begin{cases} \underline{v}+\ \ \underline{v}+\cdots+\ \ \underline{v} & n\ volte \quad per\ n=1,2,\ldots \\ \underline{0} & \qquad\qquad per\ n=0 \\ (-\underline{v})+(-\underline{v})+\cdots+(-\underline{v}) & -n\ volte \quad per\ n=-1,-2,\ldots \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



4. Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori applicati in O, che fornisce un vettore applicato in O, e la moltiplicazione di un vettore applicato in O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore applicato in O.

   Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

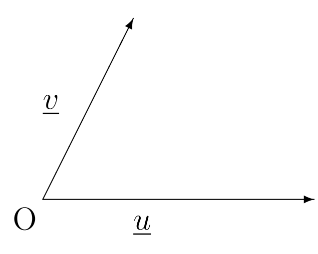
   Data una sequenza di un cero numero di vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots$, ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \ldots$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

   $$r_1\underline{a}_1 + r_2\underline{a}_2 + \cdots ,$$

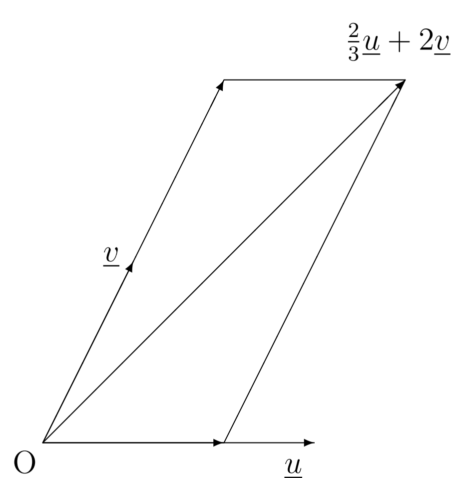
   detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto il peso del vettore $\underline{a}_i$ nella combinazione lineare.

   Esempio

   - La combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}$ applicati in O



   con pesi rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



5. Possiamo costruire un sistema di riferimento per lo spazio scegliendo un punto O e di seguito:

   - un vettore $\underline{u}$ applicato in O, diverso dal vettore nullo $\underline{0}$;
   - un vettore $\underline{v}$ applicato in O, non appartenente all'unica retta contenente $\underline{u}$;
   - un vettore $\underline{w}$ applicato in O, non appartenente all'unico piano contenente $\underline{u}, \underline{v}$.

   I vettori cosi' ottenuti non sono complanari: non solo $\underline{w}$ non appartiene al piano contenente $\underline{u}, \underline{v}$, ma anche: $\underline{v}$ non appartiene al piano contenente $\underline{u}, \underline{w}$, e $\underline{u}$ non appartiene al piano contenente $\underline{v}, \underline{w}$.

   Ora, ciascun vettore applicato in O si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

   Infatti, per ciascun vettore $\underline{b}$ applicato in O,

   - possiamo tracciare dal secondo estremo di $\underline{b}$ il piano parallelo al piano individuato da $\underline{v}, \underline{w}$, e intersecarlo con la retta individuata da $\underline{u}$, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma
   $$r\underline{u}$$
   per un opportuno scalare r;
   - possiamo tracciare dal secondo estremo di $\underline{b}$ il piano parallelo al piano individuato da $\underline{u}, \underline{w}$, e intersecarlo con la retta individuata da $\underline{v}$, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma
   $$s\underline{v}$$
   per un opportuno scalare s;
   - possiamo tracciare dal secondo estremo di $\underline{b}$ il piano parallelo al piano individuato da $\underline{u}, \underline{v}$, e intersecarlo con la retta individuata da $\underline{w}$, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma
   $$t\underline{w}$$
   per un opportuno scalare t.

   Possiamo allora esprimere il vettore $\underline{b}$ nella forma
   $$\underline{b} = r\underline{u} + s\underline{v} + t\underline{w}.$$

   In realta', questa scrittura e' unica. Diciamo che i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ formano una *base* dello spazio, e diciamo che r, s, t sono le *coordinate* del vettore $\underline{b}$ rispetto al questa base.

6. Con riferimento al puntp precedente, si puo' osservare che:

- l'uguaglianza
  $r\underline{u} = \underline{0}$
  vale soltanto per $r = 0$;
- l'uguaglianza
  $r\underline{u} + s\underline{v} = \underline{0}$
  vale soltanto per $r = s = 0$;
- l'uguaglianza
  $r\underline{u} + s\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$
  vale soltanto per $r = s = t = 0$.

Ciascuno degli insiemi

$\{\underline{u}\}$,

$\{\underline{u}, \underline{v}\}$,

$\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$

ha dunque la seguente proprieta':

una combinazione lineare dei vettori dell'insieme e' uguale al vettore nullo soltanto se tutti i coefficienti della combinazione sono nulli.

Un insieme con questa proprieta' si dice *linearmente indipendente*; altrimenti, si dice che e' *linearmente dipendente*.

Nello spazio si verifica che:

- ogni insieme linearmente indipendente di $p \leq 3$ vettori si puo' completare ad un insieme linearmente indipendente di 3 vettori;
- se un insieme di 3 vettori e' linearmente indipendente, allora i suoi vettori formano una base dello spazio;
- un insieme di quattro o piu' vettori e' sempre linearmente dipendente.

Vedremo di seguito come questi concetti e risultati si estendono agli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$.

7. Sia n un intero positivo fissato. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} a_1 r \\ \vdots \\ a_n r \end{bmatrix}.$$

Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole sottolineate $\underline{a}.\underline{b}, \ldots, \underline{v}, \ldots$. La n-pla

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

viene detta *vettore nullo.*

Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di 'numero reale' il termine 'scalare'.

Dati p vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p \in \mathbb{R}^n$ e p scalari $r_1, r_2, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$\underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2 + \cdots + \underline{a}_p r_p \in \mathbb{R}^n,$$

detto *combinazione lineare* dei vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

Dato un nuovo vettore $\underline{b}$, ci possiamo chiedere se $\underline{b}$ si puo' scrivere come combinazione lineare

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \cdots + \underline{a}_p x_p = \underline{b}$$

dei vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p$ e, in caso affermativo, secondo quali coefficienti. Ora, posto

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

possiamo riconoscere che l'equazione di sopra e' equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

di n equazioni nelle p incognite $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Osserviamo che la corrispondente matrice completa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right]$$

ha per colonne esattamente i vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p$ e $\underline{b}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \cdots & \underline{a}_p & \underline{b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right].$$

8. **Definizione** *Diciamo che i vettori* $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p \in \mathbb{R}^n$ *sono linearmente indipendenti se e solo se l'uguaglianza*

$$\underline{a}_1\ r_1 + \cdots + \underline{a}_p\ r_p = \underline{0}$$

e' soddisfatta solo per $r_1 = \ldots = r_p = 0$. *In caso contrario, cioe' se se esistono* $r_1^*, \ldots, r_p^* \in \mathbb{R}$ *non tutti nulli tali che valga l'uguaglianza*

$$\underline{a}_1\ r_1^* + \cdots + \underline{a}_p\ r_p^* = \underline{0},$$

diciamo che i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ *sono linearmente dipendenti.*

Posto

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

si ha che i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= 0 \end{cases}$$

di n equazioni nelle p incognite $x_1, x_2, \ldots, x_p$ avente matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \cdots & \underline{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

ha solo la soluzione banale $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$.

Osserviamo che:

- se questa matrice e' triangolare superiore non degenere, cioe' del tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \end{bmatrix},$$

  con coefficienti diagonali a_{ii} non nulli, allora e' facile riconoscere che nel caso $p \leq n$ i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ sono linearmente indipendenti, mentre nel caso $p > n$ sono linearmente dipendenti.

- Se questa matrice non e' triangolare superiore, nel caso $p \leq n$ puo' succedere che i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ siano linearmente dipendenti, mentre nel caso $p > n$ sono linearmente dipendenti (cfr. Appendice).

Noi faremo ripetutamente uso della seguente

> **Proposizione** *Siano dati dei vettori* $\underline{u}, \ldots, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ *linearmente indipendenti, ed un vettore* $\underline{w} \in R^n$. *Allora i vettori* $\underline{u}, \ldots, \underline{v}, \underline{w}$ *sono linearmente dipendenti se e solo se il vettore* $\underline{w}$ *si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori* $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$.
>
> **Dimostrazione.**
> Supponiamo che il vettore $\underline{w}$ si possa scrivere come combinazione lineare
>
> $\underline{w} = \underline{u}\ r + \cdots + \underline{v}\ s$
>
> dei vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$; allora si ha l'uguaglianza
>
> $\underline{0} = \underline{u}\ r + \cdots + \underline{v}\ s - \underline{w}$
>
> nella quale il peso di $\underline{w}$ e' $-1 \neq 0$, cosi' i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente dipendenti.
>
> Supponiamo che i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}, \underline{w}$ siano linearmente dipendenti, cioe' che esistano degli scalari $r^*, \ldots, s^*, t^*$ non tutti nulli tali che valga l'uguaglianza
>
> $\underline{0} = \underline{u}\ r^* + \cdots + \underline{v}\ s^* + \underline{w}\ t^*$.
>
> Ora, nel caso in cui $t^* = 0$, varrebbe l'uguaglianza
>
> $\underline{0} = \underline{u}\ r^* + \cdots + \underline{v}\ s^*$
>
> con $r^*, \ldots, s^*$ non tutti nulli, cioe' i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi.
> Dunque deve essere $t^* \neq 0$, e cio' ci permette di ricavare $\underline{w}$ come combinazione lineare
>
> $\underline{w} = -\underline{u}\ \frac{r^*}{t^*} - \cdots - \underline{v}\ \frac{s^*}{t^*}$
>
> dei vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$.

Questa proposizione suggerisce un processo ideale di costruzione di insiemi indipendenti via via piu' grandi, processo che puo' essere descritto informalmente cosi': scegliere un vettore $\underline{v}_1$, diverso da $\underline{0}$; per ciascun vettore $\underline{v}_1$ costruito al primo passo, scegliere un vettore $\underline{v}_2$, non proporzionale a $\underline{v}_1$:

$$\underline{v}_2 \notin \{\underline{v}_1\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\};$$

per ciascun insieme di due vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ costruito nei primi due passi, scegliere un vettore $\underline{v}_3$ che non sia combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$:

$$\underline{v}_3 \notin \{\underline{v}_1\alpha_1 + \underline{v}_2\alpha_2;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

....

per ciascun insieme di p vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p$ costruito nei primi due passi, scegliere un vettore $\underline{v}_{p+1}$ che non sia combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p$

$$\underline{v}_{p+1} \notin \{\sum_{j=1}^{p} \underline{v}_j \alpha_j;\ \alpha_j \in \mathbb{R}\}$$

...

In $\mathbb{R}^n$ questo processo termina al piu' all'ennesimo passo, in quanto abbiamo visto che un insieme formato da piu' di n vettori e' sempre linearmente dipendente.

Cosi' il processo termina con la costruzione di un insieme linearmente indipendente *massimale*. In realta', tutti gli insiemi linearmente indipendenti *massimali* si ottengono da questo processo.

In generale, se X e' un insieme e $\mathcal{P}$ una proprieta' relativa ai sui sottinsiemi, si dice che un sottinsieme S di X e' *massimale rispetto alla proprieta'* $\mathcal{P}$ se e solo se: S possiede la proprieta' $\mathcal{P}$; S non e' contenuto propriamente in alcun sottinsieme T di X che possieda la proprieta' $\mathcal{P}$.

Posto

$$\underline{v}_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

si ha che l'insieme dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ e' linearmente indipendente massimale se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1m}x_m &= 0 \\ \vdots & \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nm}x_m &= 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione banale e tutti i sistemi lineari

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1m}x_m &= b_1 \\ \vdots & \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nm}x_m &= b_m \end{cases}$$

hanno soluzione. Cio' e' possibile solo per $m = n$ (cfr. Appendice). Abbiamo cosi' trovato che

> *in* $\mathbb{R}^n$, *tutti gli insiemi linearmente indipendenti massimali sono formati da* n *vettori.*

Questo e' il significato profondo della frase

> *lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ *ha dimensione* n.

Sappiamo che, se S e' un insieme linearmente indipendente massimale in R^n, allora ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori di S, in realta' possiamo dire qualcosa di piu':

Proposizione. *Se l'insieme dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e' linearmente indipendente massimale, allora ogni vettore $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$\underline{v}_1 r_1 + \underline{v}_2 r_2 + \cdots + \underline{v}_n r_n = \underline{v}$$

dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$.

dimostrazione. Dobbiamo mostrare solo l'unicita' della scrittura. Consideriamo due scritture

$\underline{v}_1 r_1 + \underline{v}_2 r_2 + \cdots + \underline{v}_n r_n = \underline{v}$

$\underline{v}_1 s_1 + \underline{v}_2 s_2 + \cdots + \underline{v}_n s_n = \underline{v}$

di uno stesso vettore $\underline{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Sottraendo membro a membro, otteniamo l'uguaglianza

$\underline{v}_1(r_1 - s_1) + \underline{v}_2(r_2 - s_2) + \cdots + \underline{v}_n(r_n - s_n) = \underline{0}$

la quale, essendo i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti, e' soddisfatta solo per $r_1 - s_1 = r_2 - s_2 = \cdots = r_n - s_n = 0$, cioe' solo per $r_1 = s_1,\ r_2 = s_2,\ \ldots\ r_n = s_n$.

Un insieme linearmente indipendente massimale in $\mathbb{R}^n$ viene detto *base di* $\mathbb{R}^n$; i coefficienti della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare dei vettori di una base vengono detti *coordinate* del vettore rispetto alla base.

Posto

$$\underline{v}_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n; \qquad A = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix}$$

si ha che l'insieme dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e' una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se tutti i sistemi lineari

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

sono determinati, cioe' se e solo se la matrice A e' non singolare.

In tal caso, le coordinate del vettore $\underline{b}$ rispetto alla base sono date dal vettore

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

Appendice: Alcuni concetti e risultati sui sistemi lineari

1. Sia data una matrice quadrata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se tutti i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

che ammettono A come matrice dei coefficienti sono determinati, allora diciamo che A e' una *matrice non singolare.*

Teorema 1 *Per una matrice quadrata A le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- *A e' non singolare;*
- *il sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha solo la soluzione banale $\underline{x} = \underline{0}$;*
- *A e' equivalente per righe ad una matrice triangolare superiore non degenere;*
- *A possiede matrice inversa A^{-1};*
- *$DetA \neq 0$.*

Teorema 2 *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

una matrice di tipo $m \times n$.

- *Se $m < n$, allora il sistema lineare omogeneo*

  $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  e' indeterminato.

- *Se $m > n$, allora esistono dei numeri reali $b_1, \dots, b_m$ tali che il sistema lineare*

  $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  sia impossibile.

- *Se tutti i sistemi lineari che ammettono A come matrice dei coefficienti sono determinati, allora $m = n$, cioe' A deve essere quadrata.*