Analisi dei dati corso integrato - Algebra lineare, 26.02.08 - 27.02.08

1. Un sottinsieme non vuoto $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ che sia chiuso rispetto alle operazioni sui vettori, cioe' tale che

   - per ogni due vettori u, v in V, anche $u + v$ sta in V,
   - per ogni vettore u in V ed ogni scalare α in $\mathbb{R}$, anche αu sta in V,

   si dice *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^n$. Si usa il termine *spazio vettoriale* per indicare un sottospazio di un qualche spazio vettoriale $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

   $$2x - 5y + 10z = 0.$$

   Osserviamo che, se ciascuno dei due vettori

   $$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

   e' soluzione dell'equazione, cioe' se valgono le uguaglianze

   $$\begin{aligned} 2u_1 - 5u_2 + 10u_3 &= 0 \\ 2v_1 - 5v_2 + 10v_3 &= 0, \end{aligned}$$

   allora, sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha pure l'uguaglianza

   $$2(u_1 + v_1) - 5(u_2 + v_2) + 10(u_3 + v_3) = 0,$$

   la quale significa che anche il vettore

   $$\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = u + v$$

   e' una soluzione dell'equazione.

   Inoltre, se α e' uno scalre in $\mathbb{R}$, allora, moltiplicando per α entrambi i membri della prima uguaglianza, si ha pure l'uguaglianza

   $$2(\alpha u_1) - 5(\alpha u_2) + 10(\alpha u_3) = 0,$$

   la quale significa che anche il vettore

   $$\begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{bmatrix} = \alpha u$$

   e' una soluzione dell'equazione.

   Questo esempio ci porta a comprendere che

Per una qualsiasi equazione lineare omogenea in n incognite

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

l'insieme delle soluzioni e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

3. Piu' in generale, si ha

   Per un qualsiasi sistema lineare omogeneo di n equazioni in p incognite

   $$Ax = 0, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times p},$$

   l'insieme delle soluzioni e' un sottospazio di $\mathbb{R}^p$.

   Infatti, se $u, v \in \mathbb{R}^p$ sono due soluzioni del sistema, cioe' se valgono le uguaglianze

   $$\begin{aligned} Au &= 0 \\ Av &= 0, \end{aligned}$$

   allora, sommando membro a membro le due uguaglianze, si ha pure l'uguaglianza

   $$A(u+v) = 0,$$

   la quale significa che anche il vettore

   $$u + v$$

   e' una soluzione del sistema.

   Inoltre, se α e' uno scalre in $\mathbb{R}$, allora, moltiplicando per α entrambi i membri della prima uguaglianza, si ha pure l'uguaglianza

   $$A(\alpha u) = 0,$$

   la quale significa che anche il vettore

   $$\alpha u$$

   e' una soluzione del sistema.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'insieme delle colonne di termini noti per i quali il sistema lineare

   $$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   e' risolubile.

   In realta', questo insieme non e' altro che l'insieme delle combinazioni lineari

   $$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

delle colonne dei coefficienti del sistema.

Osserviamo che, se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \beta_1$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \beta_2$$

sono due combinazioni lineari delle colonne dei coefficienti del sistema, allora anche la loro somma e' una combinazione lineare dei coefficienti del sistema, precisamente e' la combinazione lineare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} (\beta_1 + \beta_2).$$

Inoltre, il prodotto di un qualsiasi scalare γ per una qualsiasi combinazione lineare delle colonne dei coefficienti del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \beta$$

e' ancora una combinazione lineare dei coefficienti del sistema, precisamente e' la combinazione lineare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} (\alpha\gamma) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} (\beta\gamma).$$

Questo esempio ci porta a comprendere che

> Per un qualsiasi sistema lineare di n equazioni in due incognite
>
> $$a_1 x + a_2 y = p, \qquad a_1, a_2, p \in \mathbb{R}^n$$
>
> l'insieme dei termini noti p che rendono risolubile il sistema e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

5. Piu' in generale, si ha

> Per un qualsiasi sistema lineare di n equazioni in p incognite
>
> $$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b, \qquad a_1, \ldots, a_p, b \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$
>
> l'insieme dei termini noti b che rendono risolubile il sistema e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Questo insieme non e' altro che l'insieme delle combinazioni lineari

$$a_1 \alpha_1 + \cdots + a_p \alpha_p, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$$

delle colonne dei coefficienti delle incognite.

Se

$a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p$

e

$a_1\beta_1 + \cdots + a_p\beta_p$,

sono due combinazioni lineari delle colonne dei coefficienti del sistema, allora anche la loro somma e' una combinazione lineare dei coefficienti del sistema, precisamente e' la combinazione lineare

$a_1(\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + a_p(\alpha_p + \beta_p)$.

Inoltre, il prodotto di un qualsiasi scalare γ per una qualsiasi combinazione lineare delle colonne dei coefficienti del sistema

$a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p$,

e' ancora una combinazione lineare dei coefficienti del sistema, precisamente e' la combinazione lineare

$a_1(\alpha_1\gamma) + \cdots + a_p(\alpha_p\gamma)$.

6. Sia data una matrice di tipo $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \qquad r_i \in \mathbb{R}^{1\times n}, c_j \in \mathbb{R}^{m\times 1},$$

dove $r_1, \dots, r_m$ sono le righe e $c_1, \dots, c_n$ sono le colonne di A.

Abbiamo visto che alla matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sono associati due spazi, un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ed un sottospazio di $\mathbb{R}^m$:

- L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} r_1x = 0 \\ \vdots \\ r_mx = 0 \end{cases},$$

dove x e' il vettore colonna delle n incognite, o in altri termini

$$Ax = 0, \qquad 0 \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Questo spazio si dice *spazio nullo* della matrice A, e si indica con

$$\mathcal{N}(A).$$

- L'insieme delle combinazioni lineari

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

delle colonne di A, o in altri termini l'insieme dei vettori colonna $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ per i quali e' risolubile il sistema lineare

$$Ax = b,$$

e' un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. Questo spazio si dice *spazio delle colonne* della matrice A, e si indica con

$$\mathcal{R}(A).$$

Il simbolo $\mathcal{R}$ viene dall'inglese *range* [1]

7. Nelle lezioni precedenti abbiamo introdotto alcune definizioni e provato alcuni risultati che estendono allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ alcuni concetti e alcuni fatti legati ai sistemi di riferimento nello spazio della geometria elementare.

   Ora, queste definizioni hanno senso, e questi risultati contuinuano a valere in un qualsiasi sottospazio vettoriale V di uno spazio $\mathbb{R}^n$. Precisamente, per un sottinsieme

   $$S = \{v_1, \dots, v_p\}$$

   di vettori di uno spazio vettoriale V si possono dare le seguenti definizioni:

   - S si dice *linearmente indipendente* se e solo se l'uguaglianza

     $$v_1\alpha_1 + \cdots + v_p\alpha_p = 0 \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$$

     e' soddisfatta solo per $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$;
   - S si dice *linearmente indipendente massimale in* V se e solo se S e' linearmente indipendente, e tutti gli insiemi ottenuti aggiungendo ad S un nuovo vettore di V sono linearmente dipendenti;
   - S si dice *base di* V se e solo se ogni vettore $v \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

     $$v = v_1\alpha_1 + \cdots + v_p\alpha_p$$

     dei vettori di S.

   e valgono le seguenti proposizioni:

   - se S consiste di piu' di n vettori, allora S e' linearmente dipendente;
   - se S e' linearmente indipendente allora l'insieme ottenuto aggiungendo ad S un n nuovo vettore $v \in V$ e' linearmente dipendente se e solo se v si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori di S;
   - tutti i sottinsiemi linearmente indipendenti massimali in V sono formati dallo stesso numero $d \leq n$ di vettori; questo numero viene detto la *dimensione di* V e viene indicato con

     $$dim(V);$$

[1] che sta per *codominio;* vedremo in seguito perche'.

- ciascun sottinsieme linearmente indipendente massimale in V e' anche una base di V, e viceversa.

Si noti che per provare che S e' linearmente indipendente massimale in V o, equivalentemente, che S e' una base di V basta verificare che

- S e' linearmente indipendente;
- ogni $v \in V$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori di S.

Di seguito determiniamo basi e dimensioni dello spazio nullo e dello spazio delle colonne di alcune matrici particolari.

8. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio nullo $\mathcal{N}(A)$ di A e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x + y + z = 0.$$

La generica soluzione di questa equazione si puo' descrivere come un vettore del tipo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

dove α, β sono parametri liberi in $\mathbb{R}$. Possiamo scrivere questo vettore nella forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta = v_1\alpha + v_2\beta.$$

Si puo' osservare che

- $\{v_1, v_2\}$ e' linearmente indipendente;
- ogni $v \in \mathcal{N}(A)$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\{v_1, v_2\}$.

Dunque, si ha che

$\{v_1, v_2\}$ e' una base di $\mathcal{N}(A)$, e $dim\,(\mathcal{N}(A)) = 2$.

Lo spazio delle colonne $\mathcal{R}(A)$ di A e' il sottospazio di $\mathbb{R}$ costituito dalle combinazioni lineari delle colonne di A ... :

$\{1\}$ e' una base di $\mathcal{R}(A)$, e $dim\,(\mathcal{R}(A)) = 1$.

9. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio nullo $\mathcal{N}(A)$ di A e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che e' equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La generica soluzione di questo sistema si puo' descrivere come un vettore del tipo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha = u\alpha,$$

dove α e' un parametro libero in $\mathbb{R}$.

Si ha che

$\{u\}$ e' una base di $\mathcal{N}(A)$, e $dim\,(\mathcal{N}(A)) = 1$.

Lo spazio delle colonne $\mathcal{R}(A)$ di A e' il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle combinazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma$$

delle colonne di A ... :

$\{c_1, c_2\}$ e' una base di $\mathcal{R}(A)$, e $dim\,(\mathcal{R}(A)) = 2$.

10. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio nullo $\mathcal{N}(A)$ di A e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che e' equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'unica soluzione di questo sistema e' il vettore nullo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{3\times 1}.$$

Si ha che

> l'insieme vuoto $\{\}$ e' una base di $\mathcal{N}(A)$, e $dim\,(\mathcal{N}(A)) = 0$.

Lo spazio delle colonne $\mathcal{R}(A)$ di A e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle combinazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma$$

delle colonne di A ... :

> $\{c_1, c_2, c_3\}$ e' una base di $\mathcal{R}(A)$, e $dim\,(\mathcal{R}(A)) = 3$.

11. Cio' che abbiamo visto in questi esempi ha portata generale:

    Proposizione. Per ogni matrice, la somma delle dimensioni del suo spazio delle colonne e del suo spazio nullo e' uguale al numero delle sue colonne; in simboli:

    $$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad dim\,(\mathcal{R}(A)) + dim\,(\mathcal{N}(A)) = n$$