Analisi dei dati corso integrato - Algebra lineare, 04.03.08 e 05.03.08-1

1. Nella lezione precedente abbiamo definito lo spazio nullo e lo spazio delle colonne di una matrice; ora definiamo lo spazio delle righe e lo spazio nullo sinistro di una matrice. Per fissare le idee, faremo riferimento alla generica matrice di tipo 2×3 :
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$
I quattro spazi fondamentali della matrice A sono:

   - le soluzioni del sistema lineare omogeneo
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
   associato ad A, in altri termini, i coefficienti delle combinazioni lineari
   $$\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
   delle colonne di A che risultano uguali al vettore nullo, formano un sottospazio di $\mathbb{R}^{3\times 1}$ detto spazio nullo di A ed indicato con
   $$\mathcal{N}(A);$$
   - Le combinazioni lineari delle colonne di A
   $$\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} x_3,$$
   o, in altri termini, i multipli destri della matrice A del tipo
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
   formano, al variare di x_1, x_2, x_3 in $\mathbb{R}$, un sottospazio di $\mathbb{R}^{2\times 1}$ detto spazio delle colonne di A ed indicato con
   $$\mathcal{R}(A);$$
   spesso leggeremo questo simbolo col termine "range" di A;
   - Le combinazioni lineari delle righe di A
   $$y_1 \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$$
   o, in altri termini, i multipli sinistri della matrice A del tipo
   $$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

formano, al variare di y_1, y_2 in $\mathbb{R}$, un sottospazio di $\mathbb{R}^{1\times 3}$ detto spazio delle righe di A ed indicato con

$$\mathcal{R}_s(A);$$

spesso leggeremo questo simbolo col termine "range sinistro" di A;

- le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

associato ad A, in altri termini, i coefficienti delle combinazioni lineari

$$y_1\left[\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}\right] + y_2\left[\begin{array}{ccc} d & e & f \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

delle righe di A che risultano uguali al vettore nullo, formano un sottospazio di $\mathbb{R}^{1\times 2}$ detto spazio nullo sinistro di A ed indicato con

$$\mathcal{N}_s(A).$$

I quattro spazi fondamentali della matrice

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right].$$

sono lo strumento principale per lo studio della matrice A come operatore

$$A : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$$

$$A : \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right].$$

Ad esempio: il range $\mathcal{R}(A)$ di A e' il sottospazio del codominio $\mathbb{R}^{2\times 1}$ costituito dalle immagini dei vettori nel dominio $\mathbb{R}^{3\times 1}$; lo spazio nullo $\mathcal{N}(A)$ di A e' il sottospazio del dominio $\mathbb{R}^{3\times 1}$ costituito dai vettori la cui immagine e' il vettore nullo del codominio $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

2. **Esercizio** Si determinino e si rappresentino graficamente gli spazi fondamentali della matrice

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

3. A questo punto conviene introdurre un termine e premettere un'osservazione.

Dati un insieme

$$S = \{v_1, \ldots, v_q\}$$

di vettori v_i in $\mathbb{R}^p$, le combinazioni lineari

$$v_1x_1 + \cdots v_qx_q$$

e' un un sottospazio di $\mathbb{R}^p$, detto *spazio generato da* S, indicato con

$$\langle S \rangle.$$

In inglese si usa il termine *span*.

Per esecizio, si dimostri la

Osservazione Se $T \subseteq S$ e' un sottinsieme di S tale che

- T linearmente indipendente;
- ogni vettore di S e' combinazione lineare dei vettori di T,

allora

- T e' una base per lo spazio $\langle S \rangle$ generato da S.

Questa osservazione suggerisce una procedura per determinare una base per lo spazio $\langle S \rangle$ generato dall'insieme $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_q\}$: se tutti i vettori v_i sono nulli, allora una base di $\langle S \rangle$ e' l'insieme vuoto $\emptyset$, altrimenti, scegliamo il primo vettore non nullo v_{j_1} nella lista; se tutti i vettori v_i che seguono v_{j_1} nella lista $(i > j_1)$ sono multipli di v_{j_1}, allora una base di $\langle S \rangle$ e' l'insieme $\{v_{j_1}\}$, altrimenti, scegliamo il primo vettore v_{j_2} che non e' multiplo di v_{j_1} nella lista; se tutti i vettori v_i che seguono v_{j_2} nella lista $(i > j_2)$ sono combinazione lineare di v_{j_1}, v_{j_2} allora una base di $\langle S \rangle$ e' l'insieme $\{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, altrimenti, scegliamo il primo vettore v_{j_3} che non e' combinazione lineare di v_{j_1}, v_{j_2} ...

4. In generale, gli spazi fondamentali di una matrice

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots & b_1 & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & b_m & \ldots \end{bmatrix}, \qquad a_j \in \mathbb{R}^{m\times 1} \quad b_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

di tipo $m \times n$ sono:

- lo spazio nullo di A :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \; Ax = 0_{m\times 1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \; a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0_{m\times 1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}; \end{aligned}$$

- lo spazio delle colonne, o range, di A, cioe' lo spazio generato dalle colonne di A :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \{Ax; \; x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\} \\ &= \{a_1x_1 + \cdots a_nx_n; \; x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\} \subseteq \mathbb{R}^{m\times 1}; \end{aligned}$$

- lo spazio delle righe, o range sinistro, di A, cioe' lo spazio generato dalle righe di A :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s(A) &= \{yA; \; y \in \mathbb{R}^{1\times m}\} \\ &= \{y_1b_1 + \cdots y_mb_m; \; y \in \mathbb{R}^{1\times m}\} \subseteq \mathbb{R}^{m\times 1}; \end{aligned}$$

- lo spazio nullo sinistro di A :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_s(A) &= \{y \in \mathbb{R}^{1\times m}: \ Ay = 0_{1\times n}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^{1\times m}: \ y_1 b_1 + \cdots y_m b_n = 0_{1\times n}\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times m};\end{aligned}$$

e questi spazi sono lo strumento principale per lo studio della matrice A come operatore

$$\begin{aligned}A : \mathbb{R}^{n\times 1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m\times 1} \\ A : x &\mapsto Ax.\end{aligned}$$

Le dimensioni degli spazi fondamentali della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sono legate dalle relazioni:

- la somma delle dimensioni dello spazio delle colonne e dello spazio nullo e' uguale al numero delle colonne:

$$dim\left(\mathcal{R}(A)\right) + dim\left(\mathcal{N}(A)\right) = n;$$

- le dimensioni dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe sono uguali:

$$dim\left(\mathcal{R}_s(A)\right) = dim\left(\mathcal{R}(A)\right);$$

- la somma delle dimensioni dello spazio delle righe e dello spazio nullo sinistro e' uguale al numero delle righe:

$$dim\left(\mathcal{R}_s(A)\right) + dim\left(\mathcal{N}_s(A)\right) = m$$

Il valore comune della dimensione dello spazio delle colonne e dello spazio delle righe della matrice A viene detto *rango* di A e viene indicato con $r(A)$:

$$dim\left(\mathcal{R}_s(A)\right) = r(A) = dim\left(\mathcal{R}(A)\right).$$

Abbiammo gia' illustrato la prima di queste relazioni; la terza relazione e' equivalente alla prima. Nel seguito discutiamo la seconda relazione; consideriamo prima matrici di una forma abbastanza semplice, le matrici a scala ridotta; trasporteremo poi, mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan, i risultati ottenuti da queste matrici a matrici qualsiasi.

5. La generica matrice triangolare superiore non degenere di tipo 2×3 e' della forma

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \end{bmatrix},$$

dove il simbolo $\bullet$ indica non specificati numeri reali diversi da zero, e il simbolo $*$ indica non specificati numeri reali, e lo stesso simbolo puo' rappresentare numeri diversi a seconda del posto che occupa.

Piu' in generale si possono considerare le matrici della forma

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

oppure

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che vengono dette matrici a scala per righe.

In generale, detto *pivot* di una riga il suo primo elemento diverso da zero, diciamo che una matrice A di tipo $m \times n$ e' *a scala per righe* se in A vengono prima le righe non nulle e poi eventualmente alcune righe nulle, e indicati con $j_1, j_2, j_3, \ldots$ gli indici delle colonne in cui compaiono i pivot della prima, seconda, terza, ... riga non nulla di A, si ha

$$j_1 < j_2 < j_3 < \ldots.$$

Diciamo che una matrice A a scala per righe e' una matrice *a scala ridotta per righe* se ciascuno dei pivot delle righe di A vale uno ed e' l'unico elemento diverso da zero nella sua colonna.

Ad esempio, la generica matrice di tipo 3×5 a scala per righe e la generica matrice di tipo 3×5 a scala ridotta per righe con pivot nella prima e terza colonna sono

$$\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. E' molto semplice determinare basi per lo spazio delle colonne e per lo spazio delle righe di una matrice a scala ridotta. Ad esempio, consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}.$$

- Per determinare una base per $\mathcal{R}(A)$ passiamo in rassegna la lista delle colonne ed applichiamo la procedura descritta in precedenza.

  c_1 e' diversa dalla colonna nulla, la prendiamo; c_2 e' un multiplo di c_1, la scartiamo; c_3 non e' un multiplo di c_1, la prendiamo; sia c_4 che c_5 sono combinazione lineare di c_1 e c_3, le scartiamo.

  Abbiamo trovato che le colonne che contengono i pivot,

  $$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  formano una base per $\mathcal{R}(A)$, cosi' che $dim\,(\mathcal{R}(A)) = 2$.

- Per determinare una base per $\mathcal{R}_s(A)$ passiamo in rassegna la lista delle colonne ed applichiamo la procedura descritta in precedenza.

  r_3 e' la riga nulla, la scartiamo; r_2 e' diversa dalla riga nulla, la prendiamo; r_1 non e' un multiplo di r_2, la prendiamo.

  Abbiamo trovato che le righe non nulle della matrice,

  $$r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

  formano una base per $\mathcal{R}_s(A)$, cosi' che $dim\,(\mathcal{R}_s(A)) = 2$.

Cio' che abbiamo visto in questo esempio ha portata generale:

> **Proposizione.** Per ogni matrice a scala ridotta A, le colonne contenenti i pivot formano una base dello spazio $\mathcal{R}(A)$ generato dalle colonne di A, e le righe contenenti i pivot formano una base dello spazio $\mathcal{R}_s(A)$ generato dalle righe di A. Poiche' ciascun pivot compare in una sola riga ed una sola colonna, le due basi sono formate dallo stesso numero di vettori, e si ha
>
> $$dim\,(\mathcal{R}_s(A)) = dim\,(\mathcal{R}(A))\,.$$

7. Discutiamo ora l'effetto che le operazioni elementari sulle righe di una matrice hanno sui suoi spazi fondamentali. Consideriamo una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \qquad a_j \in \mathbb{R}^{m\times 1},$$

ed una matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}, \qquad b_j \in \mathbb{R}^{m\times 1},$$

ottenuta applicando operazioni elementari per righe. Cosi' come B e' ottenuta da A, anche A puo' essere ottenuta da B, applicando le operazini elementari inverse in ordine inverso. Inoltre, ogni operazione elementare si ottiene combinando le due operazioni fondamentali di addizione di vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

Osserviamo che:

- Ciascuna delle righe di B, essendo stata ottenuta dalle righe di A mediante le operazioni fondamentali sui vettori, appartiene allo spazio generato dalle righe di A. Viceversa, ciascuna delle righe di A, potendosi ottenere dalle righe di B mediante le operazioni fondamentali sui vettori, appartiene allo spazio generato dalle righe di B. In definitiva: lo spazio delle righe di A e' uguale allo spazio delle righe di B :

  $$\mathcal{R}_s(A) = \mathcal{R}_s(B).$$

- Le operazioni elementari sulle righe di una matrice conservano l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato alla matrice, dunque conservano lo spazio nullo, cosi' si ha:

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B).$$

- Se certe colonne $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}, a_i$ di A soddisfano una relazione lineare

  $a_{i_1} r_1 + \cdots + a_{i_p} r_p = a_i,$

  allora la stessa relazione lineare

  $b_{i_1} r_1 + \cdots + b_{i_p} r_p = b_i,$

  e' soddisfatta dalle colonne $b_{i_1}, \ldots, b_{i_p}, b_i$ corrispondenti di B, e viceversa. Cio' e' una conseguenza del fatto che le operazioni elementari conservano lo spazio nullo. Ad esempio, la relazione

  $a_4 = a_1 + 2a_2$

  si puo' esprimere nella uguaglianza

  $a_1 + 2a_2 + 0a_3 - a_4 + 0a_5 + \cdots + 0a_n = 0,$

  che significa $(1, 2, 0, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{N}(A)$. Essendo $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$, vale pure l'uguaglianza

  $b_1 + 2b_2 + 0b_3 - b_4 + 0b_5 + \cdots + 0b_n = 0,$

  che si puo' esprimere nella relazione

  $b_4 = b_1 + 2b_2.$

- Se certe colonne $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}$ di A formano una base per lo spazio delle colonne di A, allora lo spazio delle colonne di B possiede una base formata dalle colonne $b_{i_1}, \ldots, b_{i_p}$ corrispondenti di B. In particolare, lo spazio delle colonne di A ha la stessa dimensione dello spazio delle colonne di B :

$$dim\,(\mathcal{R}(A)) = dim\,(\mathcal{R}(B))\,.$$

8. Vediamo ora come e' possibile ricondurre la determinazione di basi per lo spazio delle colonne e per lo spazio delle righe di una matrice alla determinazione di basi per lo spazio delle colonne e per lo spazio delle righe di una matrice a scala ridotta. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Applicando operazioni elementari per righe, possiamo ottenere la matrice a scala per righe

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ed applicando ulteriori operazioni elementari per righe, possiamo ottenere la matrice a scala ridotta per righe

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che:

- Le righe non nulle di T

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  formano una base per lo spazio delle righe di T, che e' uguale allo spazio delle righe di A, dunque esse formano una base per lo spazio delle righe di A.

- Dal fatto che

  v_1, v_2, v_4 *formano una base per* $\mathcal{R}(T)$,

  segue che

  c_1, c_2, c_4 *formano una base per* $\mathcal{R}(A)$.