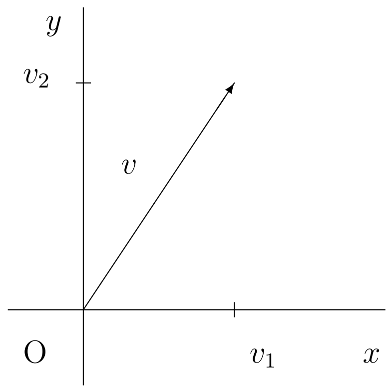
Analisi dei dati corso integrato - Algebra lineare, 05.03.08-2

1. **Ortogonalita' nel piano.**

   Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, con origine in O. Tranne avviso contrario, per "vettore" intenderemo "vettore applicato in O".

   Possiamo interpretare un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ come il vettore applicato nel punto origine O avente secondo estremo nel punto di coordinate (v_1, v_2) :

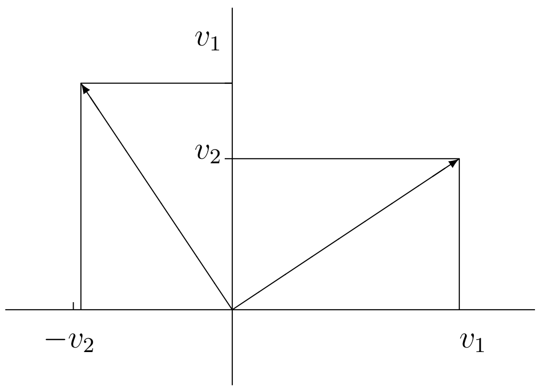
   

   Consideriamo la relazione di ortogonalita' fra due vettori non nulli del piano, scriviamo

   $v \perp w$

   per intendere che i vettori v e w sono ortogonali.

   Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte naturali per un vettore ortogonale a v, una delle quali e' $\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.

   I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

   $$\begin{bmatrix} -v_1 r \\ v_2 r \end{bmatrix},$$

dove r e' uno scalare qualsiasi. Si puo' osservare che la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' sempre nulla:

$$v_1 \cdot (-v_2 r) + v_2 \cdot (v_1 r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, il numero reale dato dall'espressione

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a^T b$$

viene detta *prodotto interno (canonico)* dei vettori a e b. Si noti che il prodotto interno e' simmetrico

$$a^T b = b^T a.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} a^T a &\geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^2; \\ a^T a &= 0 \qquad \textit{se e solo se } a = 0. \end{aligned}$$

Utilizzando il prodotto interno, possiamo riscrivere la condizione di ortogonalita' nella forma

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^T b = 0 = b^T a.$$

2. Due vettori u, v non nulli in $\mathbb{R}^2$ ortogonali fra loro formano una base per $\mathbb{R}^2$. Cio' e' intuitivamente chiaro; lo verifichiamo utilizzando il prodotto interno, che ci permette di scrivere la condizione di ortogonalita' nella forma

   $u^T v = 0 = v^T u,$

   e la condizione di diversita' dal vettore nullo nella forma

   $u^T u \neq 0, \quad v^T v \neq 0.$

   Osserviamo innanzitutto che u e v sono linearmente indipendenti, infatti dall'uguaglianza

   $$ur + vs = 0, \qquad r, s \in \mathbb{R},$$

   applicando ad entrambe i membri il prodotto interno con u, si ottiene

   $u^T(ur + vs) = u^T 0,$

   $u^T ur + u^T vs = 0,$

   $u^T ur = 0,$

   dalla quale, essendo $u^T u \neq 0$, si ricava $r = 0$; applicando ad entrambe i membri il prodotto interno con v, si ottiene

   $v^T(ur + vs) = v^T 0,$

   $v^T ur + v^T vs = 0,$

   $v^T vs = 0,$

   dalla quale, essendo $v^T v \neq 0$, si ricava $s = 0$.

   Ora, essendo u e v due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$, si ha pure che u e v formano una base di $\mathbb{R}^2$.

3. Le coordinate di un vettore b rispetto ad una base ortogonale, cioe' una base formata da due vettori u, v fra loro ortogonali, sono particolarmente facili da ricavare.

   Infatti, dall'uguaglianza

   $$ur + vs = b,$$

   che esprime il fatto che r ed s sono le coordinate di b rispetto alla base formata da u, v, applicando ad entrambi i membri il prodotto interno con u, si ha

   $u^T(ur + vs) = u^T b,$

   $u^T ur + u^T vs = u^T b,$

   $u^T ur = u^T b,$

   dalla quale, essendo $u^T u \neq 0$, si ricava

   $$r = \frac{u^T b}{u^T u};$$

   applicando ad entrambi i membri il prodotto interno con v, si ha

   $v^T(ur + vs) = v^T b,$

   $v^T ur + v^T vs = v^T b,$

   $v^T vr = v^T b,$

   dalla quale, essendo $v^T v \neq 0$, si ricava

   $$s = \frac{v^T b}{v^T v}.$$

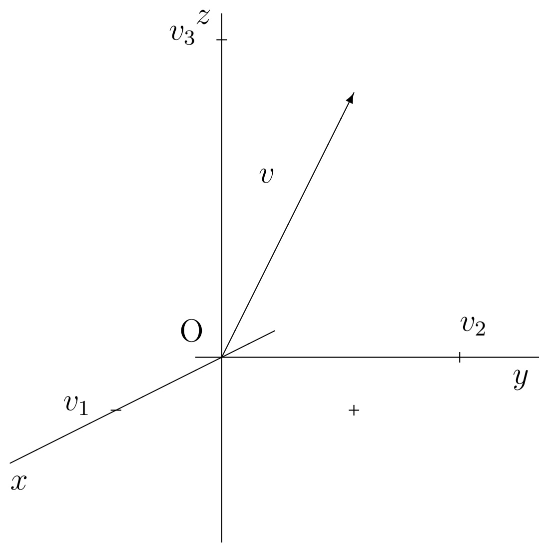
   Possiamo dire che la coordinate di b rispetto a ciascuno dei due vettori della base si ottiene prendendo il prodotto interno di b per il vettore della base e normalizzando per il prodotto interno del vettore della base con se' stesso.

   Ad esempio, si ha che i vettori $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^2$, e cosi' possiamo calcolare le coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^2$, ad esempio $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ rispetto a questa base come

   $$\begin{aligned} \textit{coordinata di } b \textit{ rispetto ad } u &= \frac{u^T b}{u^T u} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \frac{6}{5}; \\ \textit{coordinata di } b \textit{ rispetto a } v &= \frac{v^T b}{v^T v} = \frac{-2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{-2 \cdot (-2) + 4 \cdot 4} = \frac{14}{20}. \end{aligned}$$

4. **Ortogonalita' nello spazio.**

   Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, possiamo interpretare un vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ di $\mathbb{R}^3$ come il vettore applicato nel punto origine O avente secondo estremo nel punto di coordinate $(v_i)_{i=1}^3$:



Per ogni coppia di vettori $a = [a_i]_1^3$ e $b = [b_i]_1^3$ di $\mathbb{R}^3$, il numero reale dato dall'espressione

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a^T b$$

viene detto *prodotto interno (canonico)* dei vettori a e b. Si noti che il prodotto interno e' simmetrico

$$a^T b = b^T a.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} a^T a \geq 0 \qquad & \forall a \in \mathbb{R}^3; \\ a^T a = 0 \qquad & \textit{se e solo se } a = 0. \end{aligned}$$

Si verifica che i due vettori $a = [a_i]_1^3$ e $b = [b_i]_1^3$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto interno e' nullo:

$$a \perp b \qquad \textit{se e solo se } a^T b = 0.$$

5. Tre vettori u, v, w non nulli in $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali formano una base per $\mathbb{R}^3$. Cio' e' intuitivamente chiaro; per esercizio, lo si verifichi utilizzando il prodotto interno.

   Le coordinate di un vettore b rispetto ad una base ortogonale, cioe' una base formata da tre vettori u, v, w fra loro ortogonali, sono particolarmente facili da ricavare.

   Infatti, dall'uguaglianza

$$ur + vs + wt = b,$$

che esprime il fatto che r, s, t sono le coordinate di b rispetto alla base formata da u, v, w si puo' ricavare che

$$r = \frac{u^T b}{u^T u},$$
$$s = \frac{v^T b}{v^T v},$$
$$t = \frac{w^T b}{w^T w}.$$

Possiamo dire che la coordinata di b rispetto a ciascuno dei tre vettori della base si ottiene prendendo il prodotto interno di b per il vettore della base e normalizzando per il prodotto interno del vettore della base con se' stesso.

6. Dato un vettore non nullo a in $\mathbb{R}^3$, si ha che i vettori ortogonali ad a formano un piano nello spazio. Cio' e' intuitivamente chiaro; lo verifichiamo utilizzando il prodotto interno.

   Infatti, posto $a = [a_i]_1^3$ ed indicato con $x = [x_i]_1^3$ il generico vettore di $\mathbb{R}^3$, la condizione che x sia ortogonale ad a diviene

   $a^T x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$

   e sappiamo che le soluzioni di un'equazione lineare omogenea in tre incognite, nella quale qualche coefficiente e' diverso da zero, formano un piano passante per l'origine.

   Dati due vettori linearmente indipendenti a, b in $\mathbb{R}^3$, si ha che i vettori ortogonali ad a e b generano una retta nello spazio. Infatti, i vettori ortogonali ad a formano un piano, i vettori ortogonali a b formano un piano; essendo a e b non proporzionali, i due piani sono distinti; i vettori ortogonali sia ad a che a b sono i vettori comuni ai due piani, dunque questi vettori formano una retta.

7. **Ortogonalita' nello spazio $\mathbb{R}^n$.**

   Per ogni coppia di vettori $a = [a_i]_1^n$ e $b = [b_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$, il numero reale dato dall'espressione

   $$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a^T b$$

   viene detto *prodotto interno (canonico)* dei vettori a e b. Si noti che il prodotto interno e' simmetrico

   $$a^T b = b^T a.$$

   Si noti che

   $$a^T a \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^n;$$
   $$a^T a = 0 \qquad \textit{se e solo se } a = 0.$$

Per definizione, diciamo che due vettori a e b sono ortogonali se e solo se il loro prodotto interno e' nullo:

$$a \perp b \qquad \textit{se e solo se } a^T b = 0.$$

8. n vettori $u_1, \ldots, u_n$ non nulli in $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali formano una base per $\mathbb{R}^n$. Le coordinate di un vettore b rispetto ad una base ortogonale, cioe' una base formata da tre vettori $u_1, \ldots, u_n$ a due a due ortogonali, sono particolarmente facili da ricavare. Questi fatti sono analognhi a quelli visti nei casi $n = 2, 3$; per esercizio, li si enuncino in dettaglio e li si dimostrino.

9. Siano dati p vettori

   $$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, p$$

   di $\mathbb{R}^n$, e sia

   $$A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix}$$

   la matrice ottenuta affiancando le colonne $a_1, \ldots, a_p$.

   Un vettore

   $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

   e' ortogonale a queste colonne se e solo se sodddisfa le condizioni

   $$\begin{cases} a_1^T x = 0 \\ \vdots \\ a_p^T x = 0 \end{cases}$$

   cioe'

   $$\begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

   oppure

   $A^T x = 0$,

   dunque possiamo dire che

   > i vettori ortogonali alle colonne della matrice A formano lo spazio nullo di A^T.