

Analisi dei dati corso integrato - Algebra lineare, Esercizi - 2

1. Spazi fondamentali di una matrice.

Determinare una base e la dimensione per ciascuno dei quattro spazi fondamentali delle seguenti matrici, e rappresentare graficamente questi spazi.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Rango.

Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e sia r il suo rango. Si provi che

- $r \leq m$, e $r \leq n$;
- $r = n$ se e solo se le colonne di A sono linearmente indipendenti;
- A e' invertibile se e solo se $r = m = n$.

3. Disuguaglianza di Schwarz

Dal libro di Strang, esercizio 3.1.1, pag. 146.

4. Basi ortogonali

Sono dati i vettori

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che a_1, a_2, a_3 formano una base ortogonale di \mathbb{R}^3 , e si determinino le coordinate di b rispetto a questa base.

5. Proiezioni ortogonali.

Sono date la matrice e il vettore colonna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini una base ortogonale dello spazio delle colonne $\mathcal{R}(A)$ di A , la proiezione ortogonale di b su questo spazio, e la relativa distanza.

6. Matrici ortogonali

Dal libro di Strang, esercizio 3.3.6, pag. 169.