Matematica per Analisi dei Dati, 23.02.09

1. **Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$**

   Sia n un intero positivo fissato. Lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

   $$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

   munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

   $$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

   e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

   $$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} a_1 r \\ \vdots \\ a_n r \end{bmatrix}.$$

   Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole sottolineate $\underline{a}, \underline{b}, \ldots, \underline{v}, \ldots$. La n-pla

   $$\underline{0}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   viene detta *vettore nullo* di $\mathbb{R}^n$.

   Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

   Data una sequenza di un certo numero di vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p \in \mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, r_2, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

   $$\underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2 + \cdots + \underline{a}_p r_p \in \mathbb{R}^n,$$

   detto *combinazione lineare* dei vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_p$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

2. **Rappresentazione vettoriale di un sistema lineare - Esempio**

   Consideriamo il sistema lineare

   $$\begin{cases} x + 2y &= 7 \\ 3x + 4y &= 8 \\ 5x + 6y &= 8 \end{cases}$$

di tre equazioni nelle due incognite x, y. In generale, dobbiamo aspettarci che un sistema di 3 equazioni in 2 incognite sia impossibile, anche se non e' detto che nel nostro caso sia cosi'.

Le tre uguaglianze fra scalari di cui consiste il sistema si possono rappresentare come un'unica uguaglianza fra vettori con tre componenti:

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+4y \\ 5x+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

che a sua volta puo' essere scritta nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

e puo' essere rappresentata sinteticamente nella forma

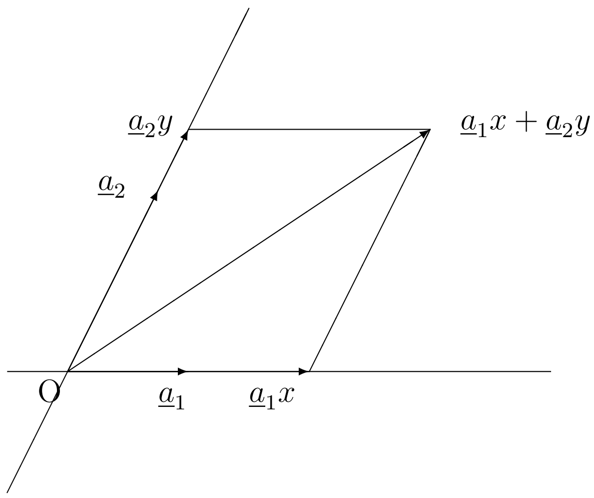
$$\underline{a}_1 x + \underline{a}_2 y = \underline{b},$$

dove

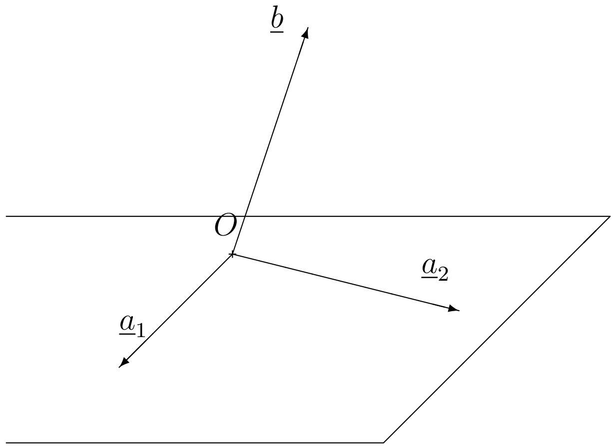
$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad e \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque dire che una coppia (r, s) di numeri reali e' una soluzione del sistema lineare se e solo se la combinazione lineare con coefficienti r, s delle colonne $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ dei coefficienti delle incognite e' uguale alla colonna termine noto $\underline{b}$.

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano con origine in un punto O, possiamo identificare ciascuna terna di numeri reali con un punto dello spazio, o meglio con un vettore uscente da O. Essendo $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$ diversi dal vettore nullo $\underline{0}$ e non proporzionali, essi saranno identificati con vettori non ridotti al punto O e non allineati. Osserviamo che: per ogni numero reale x, il vettore $\underline{a}_1 x$ sta sulla retta individuata da $\underline{a}_1$; per ogni numero reale y, il vettore $\underline{a}_2 y$ sta sulla retta individuata da $\underline{a}_2$; la combinazione lineare $\underline{a}_1 x + \underline{a}_2 y$ sta sul piano individuato da $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$. In realta' in questo modo si puo' ottenere ogni vettore uscente da O e giacente su questo piano.



In generale, dobbiamo aspettarci che il vettore $\underline{b}$ non stia su questo piano:



In altri termini, dobbiamo aspettarci che il vettore $\underline{b}$ non sia combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$.

Ritroviamo cosi' il fatto che dobbiamo aspettarci che il sistema dato sia impossibile.

4. Vediamo ora se quello che ci aspettiamo succede davvero. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y &= 7 \\ 3x + 4y &= 8 \\ 5x + 6y &= 8 \end{cases}$$

nelle incognite x, y.

Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 8 \end{array}\right],$$

ed eseguiamo le seguenti operazioni:

- usiamo la prima riga per annullare il primo elemento nelle seguenti righe:

$$\begin{array}{ll} P & \\ Q & -3P \\ R & -5P \end{array} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -13 \\ 0 & -4 & -27 \end{array}\right].$$

- usiamo la seconda riga per annullare il secondo elemento della terza riga:

$$\begin{array}{ll} P & \\ Q & \\ R & -2Q \end{array} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Ora, a questa matrice completa corrisponde il sistema lineare, equivalente al sistema dato,

$$\begin{cases} x+2y &= 2 \\ -2y &= -13 \\ 0 &= -1 \end{cases}.$$

Il sistema dato e' dunque impossibile.

5. **Rappresentazione vettoriale di un sistema lineare**

Possiamo usare le operazioni sui vettori per dare una rappresentazione sintetica del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

di m equazioni in n incognite.

Infatti, le m uguaglianze fra scalari di cui consiste il sistema possono essere sintetizzate nell'unica uguaglianza fra vettori

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

che a sua volta puo' essere scritta nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e puo' essere rappresentata sinteticamente nella forma

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \cdots + \underline{a}_n x_n = \underline{b},$$

dove

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad e \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque dire che una $n-$pla $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ di numeri reali e' una soluzione del sistema lineare se e solo se la combinazione lineare con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_n$ delle colonne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ dei coefficienti delle incognite e' uguale alla colonna $\underline{b}$ termine noto.

Se il numero m delle equazioni e' maggiore del numero n delle incognite, allora in generale dobbiamo aspettarci che il sistema sia impossibile.

Viene naturale chiedersi se l'interpretazione geometrica svolta nei punti precedenti si possa estendere in qualche modo a questo ambito.

6. **Sottospazi vettoriali**

Definizione *Sia V un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che V e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se*

- *per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$, anche $\underline{u} + \underline{v} \in V$;*
- *per ogni $\underline{u} \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$, anche $\underline{u}r \in V$.*

L'insieme $\{\underline{0}_n\}$ costituito dal solo vettore nullo e' un sottospazio, il piu' piccolo, di $\mathbb{R}^n$, mentre tutto l'insieme $\mathbb{R}^n$ e' un sottospazio, il piu' grande, di $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo che un qualsiasi sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ deve per forza contenere il vettore nullo $\underline{0}_n$; infatti V essendo non vuoto deve contenere almeno un vettore $\underline{v}$, e deve contenere anche tutti i vettori $\underline{v}r$, per ogni $r \in \mathbb{R}$; prendendo $r = 0$, si ha che $\underline{v}0 = \underline{0}_n$ deve stare in V.

Identificato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, tramite la scelta di un sistema di riferimento con origine in un punto O, con lo spazio della geometria elementare, si ha che i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono:

- l'insieme ridotto all'origine O,
- le rette passanti per O,
- i piani passanti per O,
- l'intero spazio.

E' facile rendersi conto che tutti questi sono sottospazi dello spazio; un po' meno facile, anche se semplice, e' rendersi conto che tutti i sottospazi dello spazio sono di questi tipi.

Vediamo di renderci conto, intuitivamente, dell'affermazione sui piani. Sia dato un piano α passante per O, e consideriamo l'insieme di tutti i vettori uscenti da O che stanno su questo piano α. Dati due vettori uscenti da O, il vettore loro somma si puo' costruire considerando il parallelogramma che li ammette come lati consecutivi e congiungendo O con il vertice opposto; ora, se i due vettori stanno sul piano α, allora anche l'intero parallelogramma sta su α, e in particolare le sua diagonale uscente da O, cioe' il vettore somma, sta su α. Dati un vettore uscente da O, il multipli scalari del vettore descrivono la retta individuta dal vettore; ora, se il vettore sul piano α, allora anche la retta individuta dal vettore sta sul piano α.

7. Verifichiamo ora algebricamente che ciascun piano V passante per l'origine O e' un sottospazio dello spazio. Possiamo prendere in V uun vettore $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$, ed un vettore $\underline{a}_2$ non allineato con $\underline{a}_1$, cioe' $\underline{a}_2 \notin \{\underline{a}_1 r;\ r \in \mathbb{R}\}$. Allora possiamo rappresentare V come l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$:

$$V = \{\underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Verifichiamo la prima proprieta'. Dobbiamo provare che, se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ stanno in V, allora anche $\underline{u}+\underline{v}$ sta in V. Dire che $\underline{u}$ sta in V significa dire che $\underline{u}$ si puo' scrivere nella forma

$\underline{u} = \underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2, \qquad \textit{con} \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R};$

dire che $\underline{v}$ sta in V significa dire che $\underline{v}$ si puo' scrivere nella forma

$\underline{v} = \underline{a}_1 s_1 + \underline{a}_2 s_2, \qquad \textit{con} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$

Ora si ha

$\underline{u} + \underline{v} = \underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2 + \underline{a}_1 s_1 + \underline{a}_2 s_2 = \underline{a}_1(r_1 + s_1) + \underline{a}_2(r_2 + s_2),$

e cio' significa che $\underline{u} + \underline{v}$ sta in V.

Verifichiamo la seconda proprieta'. Dobbiamo provare che, se $\underline{u}$ sta in V ed r e' uno scalare, allora anche $\underline{u}r$ sta in V. Ora si ha

$\underline{u}r = (\underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2)\, r = \underline{a}_1(r_1 r) + \underline{a}_2(r_2 r),$

e cio' significa che $\underline{u}r$ sta in V.

8. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani, si ha che l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea

$$ax + by + cz = d$$

nella quale almeno uno dei coefficienti a, b, c e' $\neq 0$, e' un piano. In realta' ogni piano dello spazio si puo' rappresentare in questo modo.

Ora, l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea,

$$ax + by + cz = 0$$

nella quale almeno uno dei coefficienti a, b, c e' $\neq 0$, e' un piano passante per O. Dunque, per quanto visto in precedenza, e' un sottospazio.

Per esercizio, lo si verifichi direttamente.