Matematica per Analisi dei Dati, 26.02.09

Nel seguito, identificheremo le terne ordinate di numeri reali, tramite la scelta di un riferimento cartesiano con origine in punto O, con punti dello spazio ordinario, o meglio con vettori applicati nel punto O. Il termine "vettore" andra' sempre inteso nel senso di "vettore applicato in O."

Abbiamo visto che i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono

- l'insieme ridotto all'origine O,
- le rette passanti per O,
- i piani passanti per O,
- l'intero spazio.

1. Sia data una retta l passante per O. Comunque scelto un vettore $\underline{a} \neq \underline{0}$ sulla retta l, si ha che la retta puo' essere descritta come l'insieme

$$l = \{\underline{a}r;\ r \in \mathbb{R}\}$$

dei multipli scalari di $\underline{a}$. Posto $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, si ha dunque

$$l = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 r \\ a_2 r \\ a_3 r \end{bmatrix};\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sia dato un piano α passante per O. Comunque scelti sul piano α un vettore $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$ non nullo ed un vettore $\underline{a}_2 \notin \{\underline{a}_1 r;\ r \in \mathbb{R}\}$ fuori dalla retta generata da $\underline{a}_1$, si ha che il piano puo' essere descritto come l'insieme

$$\alpha = \{\underline{a}_1 r_1 + \underline{a}_2 r_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

delle combinazioni lineari di $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$. Posto $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$, si ha dunque

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 \\ a_{31}r_1 + a_{32}r_2 \end{bmatrix};\ r_1, r_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sia data una equazione lineare omogenea

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3; sia

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

la sua rappresentazione matriciale, in breve

$$\underline{a}'\underline{x} = 0.$$

Se almeno un coefficiente a_i e' diverso da zero, allora l'insieme

$$\left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3;\ \underline{a}'\underline{x} = 0 \right\}$$

delle soluzioni dell'equazione e' un piano passante per O. Tutti piani dello spazio si possono ottenere in questo modo.

Sia dato un sistema di due equazioni lineari omogenee

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3; sia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la sua rappresentazione matriciale, e in breve

$$A\underline{x} = \underline{0}_2.$$

Se in ciascuna delle due equazioni c'e' almeno un coefficiente diverso da zero, e se le terne dei coefficienti delle due equazioni non sono proporzionali, allora ciascuna delle due equazioni ha come insieme delle soluzioni un piano passante per O, i due piani sono distinti, cosi' l'insieme

$$\left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3;\ A\underline{x} = \underline{0}_2 \right\}$$

delle soluzioni del sistema e' un retta passante per O. Tutte le rette dello spazio si possono ottenere in questo modo.

3. **Sottospazio generato da un insieme.**

Dati un certo numero di vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ in $\mathbb{R}^n$, si ha che la totalita' delle loro combinazioni lineari forma un insieme

$$\left\{ \sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j r_j;\ r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \right\}$$

che e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, che viene detto *spazio generato dai vettori* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$, e viene indicato con

$$span \left\{ \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m \right\}.$$

Infatti, date due combinazioni lineari

$$\sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j r_j, \qquad \sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j s_j,$$

dei vettori $\underline{a}_j$, anche la loro somma

$$\sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j r_j, + \sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j s_j = \sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j (r_j + s_j)$$

e' una combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_j$; inoltre, il prodotto di una combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_j$ per uno scalare

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j r_j \right) r = \sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j (r_j r)$$

e' ancora una combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_j$.

Osserviamo infine che questo sottospazio contiene ciascuno dei vettori $\underline{a}_j$, in quanto

$\underline{a}_1 = \underline{a}_1 1 + \underline{a}_2 0 + \underline{a}_3 0 + \cdots + \underline{a}_m 0$

$\underline{a}_2 = \underline{a}_1 0 + \underline{a}_2 1 + \underline{a}_3 0 + \cdots + \underline{a}_m 0$

$\vdots$

In realta' si tratta del piu' piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che contiene i vettori $\underline{a}_j$.

4. **Spazio delle colonne di una matrice.**

Dati in $\mathbb{R}^n$ i vettori $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad \underline{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned}
\underline{a}_1 r_1 + \cdots + \underline{a}_m r_m &= \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} r_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} r_m \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} r_1 + \cdots + a_{1m} r_m \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} r_1 + \cdots + a_{nm} r_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \\
&= A\underline{r},
\end{aligned}$$

dove A e' la matrice ottenuta accostando i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$, e $\underline{r}$ e' il vettore che ha per componenti gli m parametri r_i.

Cosi' lo spazio

$$span\,\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \underline{a}_j r_j;\ r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R} \right\}$$

generato dai vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ puo' essere rappresentato sinteticamente nella forma

$$\{A\underline{r};\ \underline{r} \in \mathbb{R}^m\};$$

si preferisce allora usare il termine *spazio delle colonne della matrice* A, e il simbolo

$$\mathcal{C}(A).$$

5. Spazio nullo di una matrice

Sia dato un sistema di m equazioni lineari omogenee

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$; sia

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

la sua rappresentazione matriciale, e in breve

$$A\underline{x} = \underline{0}_m.$$

L'insieme

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\underline{x} = \underline{0}_m\}$$

delle soluzioni del sistema e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, che viene detto *spazio nullo della matrice* A, e viene indicato con

$$\mathcal{N}(A).$$

Infatti si ha che: il vettore nullo $\underline{0}_n$ di $\mathbb{R}^n$ e' una soluzione del sistema, cosi' l'insieme delle soluzioni e' sempre diverso dall'insieme vuoto; se i vettori $\underline{u}, \underline{v}$ sono due soluzioni del sistema, cioe' se

$$A\underline{u} = \underline{0}_m, \qquad A\underline{v} = \underline{0}_m,$$

allora anche il vettore $\underline{u} + \underline{v}$ loro somma e' soluzione del sistema, in quanto

$$A\,(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} = \underline{0}_m + \underline{0}_m = \underline{0}_m;$$

inoltre, per ogni scalare r, anche il vettore $\underline{u}r$ e' soluzione del sistema, in quanto

$$A\,(\underline{u}r) = (A\underline{u})\,r = \underline{0}_m r = \underline{0}_m.$$

6. Si puo' provare che ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' rappresentare sia come lo spazio delle colonne di una opportuna matrice con n righe, sia come lo spazio delle colonne di una opportuna matrice con n colonne.

7. Ritornando allo spazio $\mathbb{R}^3$, possiamo dire che

   - ogni retta l passante per O si puo' rappresentare sia come lo spazio
   $$l = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right)$$
   delle colonne di una matrice 3×1 non nulla, sia come lo spazio
   $$l = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\right)$$
   nullo di una matrice 2×3 con righe non nulle e fra loro non proporzionali.
   - ogni piano α passante per O si puo' rappresentare sia come lo spazio
   $$\alpha = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\right)$$
   delle colonne di una matrice 3×2 con colonne non nulle e non proporzionali, sia come lo spazio
   $$\alpha = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\right)$$
   nullo di una matrice 1×3 non nulla.

8. In geometria elementare si ha la nozione intuitiva di "dimensione", secondo la quale ciascun punto ha dimensione zero, ciascuna retta ha dimensione 1, ciascun piano ha dimensione 2, e lo spazio ha dimensione 3. Vedremo nella prossima lezione come il concetto di dimensione si possa estendere ai sottospazi di $\mathbb{R}^n$.