Matematica per Analisi dei Dati, 02.03.09-
esercizio svolto, commenti

Esercizio Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Cosa si puo' dire dei sistemi associati ad A?

1. Applichiamo l'algoritmo di Gauus alla matrice data

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

   Il pivot della prima riga e' il suo primo elemento; annulliamo gli elementi al di sotto di questo pivot, sommando opportuni multipli della prima riga alle successive righe,

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

   Scambiamo la seconda e terza riga

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

   Ora il pivot della seconda riga e' il suo secondo elemento, che compare debolmente a sinistra rispetto ai pivot delle righe successive. annulliamo gli elementi al di sotto del pivot della seconda riga, sommando opportuni multipli della seconda riga alle successive righe,

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

   Il pivot della terza riga e' il suo quarto elemento, che compare debolmente a sinistra rispetto al pivot della quarta riga; annulliamo l'elemento al di sotto di questo pivot, sommando un opportuno multiplo della terza riga alla quarta riga,

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Abbiamo ottenuto una matrice a scala per righe.

2. Il generico sistema lineare con matrice dei coefficienti A, in breve il generico sistema lineare associato ad A, e'

$$A\underline{x} = \underline{p}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^5, \quad \underline{p} \in \mathbb{R}^4,$$

per esteso

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix},$$

dove i p_i sono parametri reali. La matrice completa di questo sistema e'

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p_1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & p_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & p_3 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & p_4 \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss si ottiene una matrice del tipo

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p'_1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & p'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p'_4 \end{array}\right],$$

dove i p'_i sono certe espressioni nei parametri p_i.

Il sistema associato a questa matrice e'

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \end{bmatrix}.$$

Ora, la quarta equazione e'

$0 = p'_4;$

cosi' per $p'_4 \neq 0$ il sistema e' impossibile.

Sia $p'_4 = 0$. Allora la quarta equazione e' identicamente soddisfatta. Possiamo risolvere il sistema ricavando le incognite corrispondenti ai pivot, cioe'

$$x_1, x_2, x_4,$$

in funzione delle restanti, cioe' x_3, x_5.

In definitiva, si ha:

- per $p'_4 \neq 0$, il sistema e' impossibile;
- per $p'_4 = 0$, il sistema e' indeterminato, e la soluzione generale dipende da due parametri liberi.

3. Per $p'_4 = 0$, possiamo risolvere il sistema nel modo seguente.

- La terza equazione e'
  $x_4 + 2x_5 = p_3'$;
  ricaviamo la x_4 in funzione della x_5 :
  $x_4 = -2x_5 + p_3'$.
- La seconda equazione e'
  $-x_2 - 2x_3 = p_2'$;
  ricaviamo la x_2 in funzione della x_3 :
  $x_2 = -2x_3 - p_2'$.
- La prima equazione e'
  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = p_1'$;
  sostituiamo ad x_4 la sua espressione in funzione di x_5, sostituiamo ad x_2 la sua espressione in funzione di x_3 :
  $x_1 + 2(-2x_3 - p_2') + 3x_3 + (-2x_5 + p_3') + x_5 = p_1'$
  $x_1 - x_3 - x_5 - 2p_2' + p_3' = p_1'$;
  ricaviamo la x_1 in funzione delle x_3, x_5 :
  $x_1 = x_3 + x_5 + p_1' + 2p_2' - p_3'$.

Dunque la soluzione generale del sistema e'

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 + x_5 + p_1' + 2p_2' - p_3' \\ -2x_3 - p_2' \\ x_3 \\ -2x_5 + p_3' \\ x_5 \end{bmatrix},$$

dove le variabili x_3 e x_5 possono assumere qualsiasi valore, in breve sono libere.

4. Se il sistema di partenza era omogeneo, cioe'
   $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$,
   allora anche
   $p_1' = p_2' = p_3' = p_4' = 0$,
   e la soluzione generale del sistema e'

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 + x_5 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

dove le variabili x_3 e x_5 sono libere. Ora possiamo riscrivere questa espressione nella forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_5.$$

Vediamo cosi' che le soluzioni del sistema sono le combinazioni lineari dei due vettori $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, cioe' l'insieme delle soluzioni del sistema e' lo spazio $span\{\underline{s}_1, \underline{s}_2\}$ generato da $\underline{s}_1, \underline{s}_2$.