Matematica per Analisi dei Dati, 05.03.09

1. Sia dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$A\underline{x} = \underline{b}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{b} \in \mathbb{R}^m.$$

In generale, ci aspettiamo che:

$$\begin{array}{llll} & n < m & & \textit{indeterminato} \\ \textit{per} & n = m & \textit{il sistema sia} & \textit{determinato} \\ & n > m & & \textit{impossibile} \end{array}$$

Non e' pero' detto che succeda sempre cosi'. Nel punto seguente diamo un paio di proposizioni che sono sempre vere, senza eccezioni.

2. **Proposizione 1** *Sia data una matrice A di tipo $m \times n$ con $m < n$. Allora il sistema lineare omogeneo associato ad A*

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}_m$$

e' indeterminato.

Dim. Il sistema

$$A\underline{x} = \underline{0}_m$$

e' equivalente ad un sistema

$$S\underline{x} = \underline{0}_m$$

con S matrice a scala di tipo $m \times n$.

Indichiamo con r il numero dei pivot di S, ed osserviamo che $0 \leq r \leq m$. Per semplicita', supponiamo che i pivot stiano nelle prime colonne. Allora la matrice S e' della forma

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & & & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & & & s_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{rr} & \dots & s_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Cosi' sistema lineare

$$S\underline{x} = \underline{0}_m$$

si puo' risolvere ricavando le incognite

$$x_1, x_2, \dots, x_r$$

in funzione delle rimanenti $x_{r+1}, \dots, x_n$. Si osservi che, essendo $r \leq m < n$, c'e' almeno una incognita libera, dunque il sistema ha infinite soluzioni.

$\square$

Proposizione 2 *Sia data una matrice A di tipo $m \times n$ con $m > n$. Allora esiste una colonna $\underline{c} \in \mathbb{R}^m$ tale che il sistema*

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \underline{c}$$

sia impossibile.

Dim. (informale) Il generico sistema

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

avente matrice dei coefficienti A e' equivalente ad un sistema

$$S\underline{x} = \underline{b}'$$

dove S e' una matrice a scala di tipo $m \times n$, e $\underline{b}'$ e' un vettore le cui componenti sono espressioni nelle componenti del vettore $\underline{b}$.

Indichiamo con r il numero dei pivot di S, ed osserviamo che $0 \leq r \leq n$. Per semplicita', supponiamo che i pivot stiano nelle prime r colonne. Allora la matrice S e' della forma

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & & & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & & & s_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{rr} & \dots & s_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Cosi' nel sistema lineare

$$S\underline{x} = \underline{b}'$$

le equazioni dalla $(r+1)-$ma in poi sono del tipo

$$\begin{array}{l} 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 = b'_m \end{array}.$$

Si osservi che, essendo $r \leq n < m$, c'e' almeno una di queste equazioni. Dunque abbiamo almeno una condizione che le componenti di $\underline{b}$ devono soddisfare affinche' il sistema sia risolubile. Se $\underline{c}$ e' un vettore le cui componenti non soddisfano queste condizioni, allora il sistema

$$A\underline{x} = \underline{c}$$

e' impossibile.

$\square$

3. **Indipendenza/Dipendenza lineare**

Dati p vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, moltiplicando ogni vettore per 0 e poi sommando, si ottiene la combinazione lineare $0\underline{a}_1 + \cdots + 0\underline{a}_p$, detta *combinazione lineare banale* dei vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$, il cui risultato e' il vettore nullo:

$$0\underline{a}_1 + \cdots + 0\underline{a}_p = \underline{0}.$$

- Se la combinazione lineare banale dei vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ e' l'unica combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ il cui risultato e' $\underline{0}$, allora diciamo che $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ sono *linearmente indipendenti;*
- se c'e' una combinazione lineare non banale dei vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ il cui risultato e' $\underline{0}$, allora diciamo che $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ sono *linearmente dipendenti.*

In pratica, per verificare se i p vettori

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{a}_p = \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sono linermente indipendenti o dipendenti, dobbiamo impostare l'equazione

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix} x_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

nelle incognite $x_1, \dots, x_p$, cioe' il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora si ha:

- se il sistema ammette solo la soluzione banale

  $$x_1 = \cdots = x_p = 0,$$

  allora i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ sono linearmente indipendenti;
- se il sistema ammette qualche soluzione soluzione non banale,

  $$x_1 = s_1, \dots, x_p = s_p, \qquad \textit{con gli } s_i \textit{ non tutti nulli},$$

  allora i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ sono linearmente dipendenti.

Esempio Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ consideriamo gli n vettori

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ammette solo la soluzione banale

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0;$$

dunque i vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione Siano dati $p > n$ vettori

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$. Per la Prop. 1, il sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e' indeterminato, e cosi' ammette qualche soluzione soluzione non banale. Dunque i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ sono linearmente dipendenti.

Possiamo allora dire che

In $\mathbb{R}^n$, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti e' n.

4. Vogliamo ora pprofondire quest'ultima considerazione.

   Diciamo che un insieme $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p\}$ di vettori di $\mathbb{R}^n$ e' *linearmente indipendente massimale in* $\mathbb{R}^n$ se

   - i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ sono linearmente indipendenti, e

- per ogni vettore $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^n$, i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p, \underline{b}$ sono linearmente dipendenti.

Osserviamo che ogni insieme linearmente indipendente di n vettori di $\mathbb{R}^n$ e' linearmente indipendente massimale. In realta' vale anche il viceversa. Per provarlo, ci avvarremo della seguente

> **Proposizione 3** *Siano dati dei vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti, ed un vettore $\underline{w} \in R^n$. Allora i vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente dipendenti se e solo se il vettore $\underline{w}$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}$.*
>
> **Dimostrazione.**
> Supponiamo che il vettore $\underline{w}$ si possa scrivere come combinazione lineare
>
> $\underline{w} = r\underline{u} + \cdots + s\underline{v}$
>
> dei vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}$; allora si ha l'uguaglianza
>
> $-r\underline{u} - \cdots - s\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$
>
> nella quale il coefficiente di $\underline{w}$ e' $1 \neq 0$, cosi' i vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente dipendenti.
>
> Supponiamo che i vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}, \underline{w}$ siano linearmente dipendenti, cioe' che esistano degli scalari $r^*, \dots, s^*, t^*$ non tutti nulli tali che valga l'uguaglianza
>
> $r^*\underline{u} + \cdots + s^*\underline{v} + t^*\underline{w} = \underline{0}.$
>
> Ora, nel caso in cui $t^* = 0$, varrebbe l'uguaglianza
>
> $r^*\underline{u} + \cdots + s^*\underline{v} = \underline{0}$
>
> con $r^*, \dots, s^*$ non tutti nulli, cioe' i vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi.
> Dunque deve essere $t^* \neq 0$, e cio' ci permette di ricavare $\underline{w}$ come combinazione lineare
>
> $\underline{w} = -\frac{r^*}{t^*}\underline{u} - \cdots - \frac{s^*}{t^*}\underline{v}$
>
> dei vettori $\underline{u}, \dots, \underline{v}$.

Possiamo ora provare la

Proposizione *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$, *tutti gli insiemi linearmente idipendenti massimali sono costituiti da n vettori.*

Dim. Sia $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di $\mathbb{R}^n$.

Chiaramente si ha $p \leq n$. Se $p < n$, per la Proposizione 2 esiste un vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ che non e' combinazione lineare dei vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ e dunque per la Proposizione 3 i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p, \underline{b}$ sono linearmente indipendenti. Cio' significa che l'insieme linearmente indipendente $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ non e' massimale in $\mathbb{R}^n$.

L'unica possibilita' per il numero di vettori di un insieme linearmente indipendente massimale e' dunque $p = n$. $\square$

Commento sulle Proposizioni 1 e 2

In realta' la proposizione 2 si puo' dedurre dalla Proposizione 1.

Infatti, sia A una matrice di tipo $m \times n$ con $m > n$. La matrice trasposta A^T ha tipo $n \times m$ ed $n < m$. Per la Proposizione 1, il sistema lineare omogeneo

$$A^T \underline{y} = \underline{0}_n, \qquad \underline{y} \in \mathbb{R}^m,\ \underline{0}_n \in \mathbb{R}^n,$$

e' indeterminato, e cosi' ammette una soluzione non banale $\underline{s} \neq \underline{0}_m$.

Consideriamo il sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{s}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{s} \in \mathbb{R}^m.$$

Ora, moltiplicando il primo membro a sinistra per $\underline{s}^T$, si ha

$$\underline{s}^T \left(A\underline{x}\right) = \left(\underline{s}^T A\right) \underline{x} = \left(A^T \underline{s}\right)^T \underline{x} = \underline{0}_n^T \underline{x} = 0,$$

per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. D'altro canto, moltiplicando il secondo membro a sinistra per $\underline{s}^T$, si ha

$$\underline{s}^T \underline{s} = \sum_1^n s_i^2 > 0.$$

Dunque il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{s}$. e' impossibile.