Matematica per Analisi dei Dati, 09.03.09

1. Sia n in intero positivo fissato, e sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

   Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V viene detto dimensione di V, e viene indicato con $dimV$.

   Si osservi che questo massimo esiste finito ed e' al piu' n.

   Questa definizione, benche' sia la piu' immediata da dare, non e' la piu' adeguata da utilizzare.

2. Sia

$$\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

   dove i simboli $c_1, c_2, \ldots, c_6$ indicano le colonne della matrice. Consideriamo lo spazio

$$V = span\{c_1, c_2, \ldots, c_6\} \subset \mathbb{R}^4$$

   e cerchiamo di determinarne la dimensione.

   Viene naturale passare i rassegna i vettori per costruire un insieme linearmente indipendente il piu' grande possibile. In base alla Proposizione 3 della lezione precedente possiamo procedere cosi': prendiamo il primo vettore non nullo, che dunque da solo e' linearmente indipendente; poi prendiamo il primo vettore che non sia proporzionale a quello gia' preso, e che dunque con quello gia' preso formi un insieme linearmente indipendente; poi prendiamo il primo vettore che non sia combinazione lineare di quelli gia' presi, e che dunque con quelli gia' presi formi un insieme linearmente indipendente; ...

   (a) ci chiediamo se possiamo prendere c_1; $c_1 = 0$, lo scartiamo;

   (b) ci chiediamo se possiamo prendere c_2; $c_2 \neq 0$, lo teniamo;

   (c) ci chiediamo se a c_2 possiamo aggiungere c_3; ora $c_3 = 2c_2$, lo scartiamo;

   (d) ci chiediamo se a c_2 possiamo aggiungere c_4; ora c_4 non e' un multipo scalare di c_2, lo teniamo;

   (e) ci chiediamo se a c_2, c_4 possiamo aggiungere c_5; ora $c_5 = 2c_2+c_4$, lo scartiamo;

   (f) ci chiediamo se a c_2, c_4 possiamo aggiungere c_6; ora c_6 non e' una combinazione lineare di c_2, c_4, lo teniamo.

   Abbiamo cosi' ottenuto l'insieme

$$\{c_2, c_4, c_6\}.$$

3. Verifichiamo che i vettori c_2, c_4, c_6 sono linearmente indipendenti, cioe' che l'uguaglianza

$$rc_2 + sc_4 + tc_6 = 0, \qquad r, s, t \in \mathbb{R}$$

e' soddisfatta solo per $r = s = t = 0$.

Ci chiediamo se puo' essere $t \neq 0$; in tal caso dall'uguaglianza potremmo ricavare c_6 come combinazione lineare di c_2, c_4 :

$$c_6 = -\frac{r}{t}c_2 - \frac{s}{t}c_4,$$

contro quanto osservato al passo (f).

Dunque $t = 0$, e l'uguaglianza diviene

$$rc_2 + sc_4 = 0, \qquad r, s \in \mathbb{R}.$$

Ci chiediamo se puo' essere $s \neq 0$; in tal caso dall'uguaglianza potremmo ricavare c_4 come multiplo scalare di c_2 :

$$c_4 = -\frac{r}{s}c_2,$$

contro quanto osservato al passo (d).

Dunque anche $s = 0$, e l'uguaglianza diviene

$$rc_2 = 0, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Ci chiediamo se puo' essere $r \neq 0$; in tal caso dall'uguaglianza potremmo ricavare

$$c_2 = 0,$$

contro quanto osservato al passo (b).

Dunque anche $r = 0$.

4. Verifichiamo che aggiungendo ai tre vettori linearmente indipendenti c_2, c_4, c_6 uno qualsiasi dei vettori scartati c_1, c_3, c_5 si hanno quattro vettori linearmente dipendenti.

Avevamo scarato c_1 in quanto $c_1 = 0$; ora, i vettori c_1, c_2, c_4, c_6 sono linearmente dipendenti in quanto soddisfano la relazione non banale

$$1c_1 + 0c_2 + 0c_4 + 0c_6 = 0.$$

Avevamo scarato c_3 in quanto $c_3 = 2c_2$; ora, i vettori c_2, c_3, c_4, c_6 sono linearmente dipendenti in quanto soddisfano la relazione non banale

$$-2c_2 + 1c_3 + 0c_4 + 0c_6 = 0.$$

Avevamo scarato c_5 in quanto $c_5 = 2c_2 + c_4$; ora, i vettori c_2, c_4, c_5, c_6 sono linearmente dipendenti in quanto soddisfano la relazione non banale

$$-2c_2 - 1c_2 + 1c_5 + 0c_6 = 0.$$

5. Nel punto precedente in realta' abbiamo provato che l'insieme $\{c_2, c_4, c_6\}$ e' linearmente indipendente massimale nell'insieme $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$. Ci chiediamo ora se $\{c_2, c_4, c_6\}$ e' linearmente indipendente massimale nello spazio

$$V = span\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$$

generato dai vettori c_i.

Ora, gli elementi di V sono le combinazioni lineari

$$r_1c_1 + r_2c_2 + \cdots + r_6c_6, \qquad r_1, r_2, \ldots, r_6 \in \mathbb{R}.$$

Ricordando quanto osservato ai passi (a), (c), (e), possiamo riscrivere questa espressione nella forma

$$r_1 0 + r_2c_2 + r_3 (2c_2) + r_4c_4 + r_5 (2c_2 + c_4) + r_6c_6$$

cioe'

$$(r_2 + 2r_3 + 2r_5) c_2 + (r_4 + r_5) c_4 + r_6c_6.$$

Abbiamo cosi' che ogni elemento di V e' combinazione lineare dei vettori c_2, c_4, c_6.

Dunque l'insieme $\{c_2, c_4, c_6\}$ e' linearmente indipendente massimale in V.

Ci chiediamo ora se possiamo affermare che la dimensione dello spazio V e' 3. In base alla definizione data, non ancora: si potrebbe obiettare che scegliendo i vettori in un qualche altro modo, se ne possano trovare piu' di tre che siano linearmente indipendenti.

6. In realta' l'eventualita' presentata alla fine del punto precedente non puo' accadere, in quanto si puo' dimostrare che vale il seguente

Teorema *Sia V un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Tutti gli insiemi linearmente indipendenti massimali in V sono costituiti dallo stesso numero di elementi.*

> Possiamo allora ridefinire la dimensione di un sottospazio V come la cardinalita' di un qualsiasi insieme linearmente indipendente massimale in V.

Nel nostro caso si ha dunque

$$dim(V) = 3.$$

7. Nella determinazione di un insieme linearmente indipendente massimale nello spazio generato dalle colonne c_i della matrice

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \end{array},$$

ci siamo avvalsi di alcune osservazioni, rese possibili dalla semplicita' della matrice stessa. Viene da chiedersi se ci si possa avvalere anche di un algoritmo.

La risposta e' positiva, ed e' basata sul fatto che le operazioni elementari sulle righe conservano le relazioni lineari fra le colonne. Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan si trasforma la matrice data in una matrice a scala ridotta per righe, si osservano le relazioni lineari fra le colonne di questa matrice a scala ridotta, e si deducono le relazioni lineari fra le colonne della matrice data.

Nel caso in esame, l'algoritmo di Gauss-Jordan produce la matrice

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 & c'_5 & c'_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Su questa matrice si osservano immediatamente le seguenti relazioni lineari fra le colonne:

(a) $c'_1 = 0$;

(b) $c'_2 \neq 0$;

(c) $c'_3 = 2c'_2$;

(d) c'_4 non e' un multiplo scalare di c'_2;

(e) $c'_5 = 2c'_2 + c'_4$;

(f) c'_6 non e' combinazione lineare di c'_2 e c'_4.

Ora, le stesse relazioni lineari devono valere fra le colonne della matrice data:

(a) $c_1 = 0$;

(b) $c_2 \neq 0$;

(c) $c_3 = 2c_2$;

(d) c_4 non e' un multiplo scalare di c_2;

(e) $c_5 = 2c_2 + c_4$;

(f) c_6 non e' combinazione lineare di c_2 e c_4.

Queste sono esattamente le relazioni che avevamo "indovinato" in precedenza, e che ci hanno portato alla costruzione di un insieme linearmente indipendente massimale nello spazio generato dalle colonne della matrice data.

8. La procedura per la determinazione di un insieme linearmente indipendente massimale nello spazio generato dalle colonne di una matrice puo' essere descritta cosi':

   E' data una matrice A con colonne $c_1, c_2, \ldots, c_n$;
   si applichi l'algoritmo di Gauss-Jordan, ottenendo cosi' una matrice a scala ridotta S con colonne $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$;
   siano $c'_{j_1}, c'_{j_2}, \ldots, c'_{j_r}$ le colonne di S in cui compaiono i pivot;
   si prendano le colonne $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r}$ di A.

Si osservi che

> la dimensione dello spazio generato dalle colonne della matrice A e' il numero dei pivot della matrice a scala ridotta S.

9. Sia

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

dove i simboli $r_1, \ldots, r_4$ indicano le righe della matrice. Consideriamo lo spazio

$$W = span\{r_1, \ldots, r_4\} \subset \mathbb{R}^6$$

e determiniamone la dimensione.

Per fare questo, consideriamo la matrice trasposta

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \end{array},$$

le applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan, ottenenendo cosi' la matrice a scala ridotta

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_1' & r_2' & r_3' & r_4' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

sulla quale leggiamo che

(a) r_1', r_2', r_3' sono linearmente indipendenti;

(b) $r_4' = r_3'$;

dunque

(a) r_1, r_2, r_3 sono linearmente indipendenti;

(b) $r_4 = r_3$ (questo gia' si vedeva).

Dunque l'insieme

$$\{r_1, r_2, r_3\}$$

e' un insieme linearmente indipendente massimale nello spazio W, e cosi'

$$dim(W) = 3.$$

10. In generale, data una matrice A di tipo $m \times n$, indicate con $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^m$ le sue colonne e indicate con $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}^n$ le sue righe

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} c_1 & \dots & \dots & c_n \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array},$$

possiamo considerare lo spazio generato dalle colonne di A

$$\mathcal{C}(A) = span\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

e lo spazio generato dalle righe di A

$$\mathcal{R}(A) = span\{r_1, \dots, r_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Si puo' provare che questi due spazi hanno la stessa dimensione:

$$dim\,(\mathcal{C}(A)) = dim\,(\mathcal{R}(A))\,;$$

questa dimensione comune viene detta *rango* della matrice A, e viene indicata con

$$r(A).$$

Si prova inoltre che

$$r(A) = \textit{ numero dei pivot di } S,$$

dove S e' la matrice a scala ridotta per righe ottenuta applicando ad A l'algoritmo di Gauss-Jordan.

Osserviamo infine che $r(A) \leq min(m, n)$.