Matematica per Analisi dei Dati, 10.03.09

1. Sia data una matrice A di tipo $m \times n$, siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^m$ le sue colonne e siano $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}^n$ le sue righe:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} c_1 & \ldots & \ldots & c_n \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}.$$

   Alla matrice A sono associati quattro spazi:

   - lo spazio delle colonne:
   $$\mathcal{C}(A) = span\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$
   - lo spazio delle righe:
   $$\mathcal{R}(A) = span\{r_1, \ldots, r_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$
   - lo spazio nullo:
   $$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$
   - lo spazio nullo sinistro:
   $$\mathcal{N}_s(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = 0_n^T\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

   Abbiamo terminato la lezione scorsa stabilendo che lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne hanno la stessa dimensione:

$$dim\,(\mathcal{C}(A)) = dim\,(\mathcal{R}(A))\,,$$

   che viene detta *rango* della matrice A, e viene indicata con

$$r(A).$$

   Inoltre,
$$r(A) = \textit{ numero dei pivot di } S,$$
   dove S e' la matrice a scala ridotta per righe ottenuta applicando ad A l'algoritmo di Gauss-Jordan.

2. Nella lezione scorsa abbiamo considerato la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

abbiamo determinato un insieme linearmente indipendente massimale nello spazio delle colonne, un insieme linearmente indipendente massimale nello spazio delle righe, e abbiamo trovato che

$$dim\,(\mathcal{C}(A)) = dim\,(\mathcal{R}(A)) = 3.$$

Per fare questo, abbiamo tra l'altro considerato la matrice a scala ridotta

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

associata tramite l'algoritmo di Gauss-Jordan ad A, e la matrice a scala ridotta

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

associata tramite l'algoritmo di Gauss-Jordan ad A^T.

3. Cerchiamo ora di determinare la dimensione dello spazio nullo di A, che e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = 0_4.$$

Questo sistema e' equivalente al sistema

$$Sx = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = 0_4,$$

cioe'

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + \quad 2x_5 \quad = 0 \\ \qquad\quad x_4 + \ x_5 \quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_6 = 0 \end{cases}$$

Ora, risolviamo il sistema rispetto alle incognite i cui coefficienti sono i pivot della matrice S, cioe' le incognite x_2, x_4, x_6, lasciando libere le restanti incognite

x_1, x_3, x_5; la soluzione generale e'

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_3 - 2x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Ora possiamo riscrivere la soluzione generale nella forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_3 - 2x_5 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 = u_1x_1 + u_3x_3 + u_5x_5.$$

Abbiamo cosi' trovato che lo spazio nullo di A e' lo spazio generato dai tre vettori u_1, u_3, u_5 :

$$\mathcal{N}(A) = span\{u_1, u_3, u_5\}.$$

Ora, l'insieme dei vettori u_1, u_3, u_5 e' linearmente indipendente, cosi'

$$dim\,(\mathcal{N}(A)) = 3.$$

Osserviamo che 3 e' il numero delle incognite libere, che a sua volta e' il numero 6 di tutte le incognite meno il numero 3 delle incognite fondamentali, che a sua volta e' il numero delle colonne di A meno il rango di A.

4. Cerchiamo ora di determinare la dimensione dello spazio nullo sinistro di A, che e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$y^tA = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = 0_6^T,$$

che possiamo riscrivere

$$A^Ty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0_6.$$

Questo sistema e' equivalente al sistema

$$Ty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0_6,$$

cioe'

$$\begin{cases} y_1 & & & = 0 \\ & y_2 & & = 0 \\ & & y_3 + y_4 & = 0 \end{cases}$$

Ora, risolviamo il sistema rispetto alle incognite i cui coefficienti sono i pivot della matrice T, cioe' le incognite y_1, y_2, y_3, lasciando libera la restante incognita y_4; la soluzione generale e'

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} y_4 = v_4 y_4, \qquad y_4 \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo cosi' trovato che lo spazio nullo sinistro di A e' lo spazio generato dal vettore v_4 :

$$\mathcal{N}_s(A) = span\{v_4\}.$$

Ora, il vettore v_4 e' linearmente indipendente, cosi'

$$dim\left(\mathcal{N}_s(A)\right) = 1.$$

Osserviamo che 1 e' il numero delle incognite libere, che a sua volta e' il numero 4 di tutte le incognite meno il numero 3 delle incognite fondamentali, che a sua volta e' il numero delle righe di A meno il rango di A.

5. In generale, data una matrice A di tipo $m \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

indicato con r il numero dei pivot della matrice a scala ridotta per righe associato ad A dall'algoritmo di Gauss-Jordan, si prova che

$$dim\left(\mathcal{C}(A)\right) = dim\left(\mathcal{R}(A)\right) = r;$$

$$dim\left(\mathcal{N}(A)\right) = n - r;$$

$$dim\left(\mathcal{N}_s(A)\right) = m - r.$$

Il numero r e' il rango $r(A)$ della matrice A.

Si osservi che il rango di una matrice e' uguale al rango della sua trasposta:

$$r(A^T) = r(A).$$

6. **Basi** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, consideriamo i vettori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che formano un insieme linearmente indipendente massimale in $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che ogni vettore $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ si puo' scomporre come

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

cioe' come combinazione lineare dei vettori e_1, e_2, e_3; inoltre i coefficienti di questa combinazione lineare sono univocamente determinati dal vettore b, in quanto risultano essere le sue componenti.

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, consideriamo il vettore e_i che ha la $i-$ma componente uguale a 1 e le altre uguali a 0. Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$. L'insieme $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ viene detto *base canonica* dello spazio $\mathbb{R}^n$.

Teorema *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, e sia $\{v_1, \dots, v_p\}$ un insieme linearmente indipendente massimale in V. Ogni vettore $b \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$b = b_1 v_1 + \cdots + b_p v_p, \qquad b_i \in \mathbb{R}$$

dei vettori $v_1, \dots, v_p$.

Per questa proprieta', al posto del termine "insieme linearmente indipendente massimale in V", si preferisce usare come sinonimo il termine "base di V." Gli scalari $b_1, \dots, b_p$ vengono detti *coordinate del vettore b rispetto alla base* $\{v_1, \dots, v_p\}$.

Dimostrazione Sia b uun vettore di V; sappiamo che, aggiungendo il vettore b ai vettori linermente indipendenti $v_1, v_2, \dots, v_p$ si ha che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_p, b$ sono linearmente dipendenti, cioe' esistono degli scalari non tutti nulli $r_1, r_2, \dots, r_p, s$ tali che

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_p v_p + sb = 0.$$

Ora, se $s \neq 0$, possiamo ricavare

$$b = -\frac{r_1}{s} v_1 - \frac{r_2}{s} v_2 - \cdots - \frac{r_p}{s} v_p.$$

Il caso $s = 0$ non si puo' presentare, per il fatto che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti.

Abbiamo cosi' provato che il vettore b si puo' scrivere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Ora, se

$$b = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_p v_p, \qquad b_i \in \mathbb{R}$$
$$b = b'_1 v_1 + b'_2 v_2 + \cdots + b'_p v_p, \qquad b'_i \in \mathbb{R},$$

sono due scritture del vettore b come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$, sottraendo membro a membro si ha la relazione lineare

$$0_n = (b_1 - b'_1)v_1 + (b_2 - b'_2)v_2 + \cdots + (b_p - b'_p)v_p$$

che, essendo i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$ linearmente indipendenti, puo' essere soddiffatta solo se

$$b_1 - b'_1 = b_2 - b'_2 = \cdots = b_p - b'_p = 0,$$

cioe'

$$b_1 = b'_1, \quad b_2 = b'_2 \quad \ldots \quad b_p = b'_p.$$

Ortogonalita'

1. **Ortogonalita', nello spazio**

   Diamo per intuitivamente nota la nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli dello spazio. Considereremo sempre vettori applicati in uno stesso punto O; dati due tali vettori v, w, scriveremo

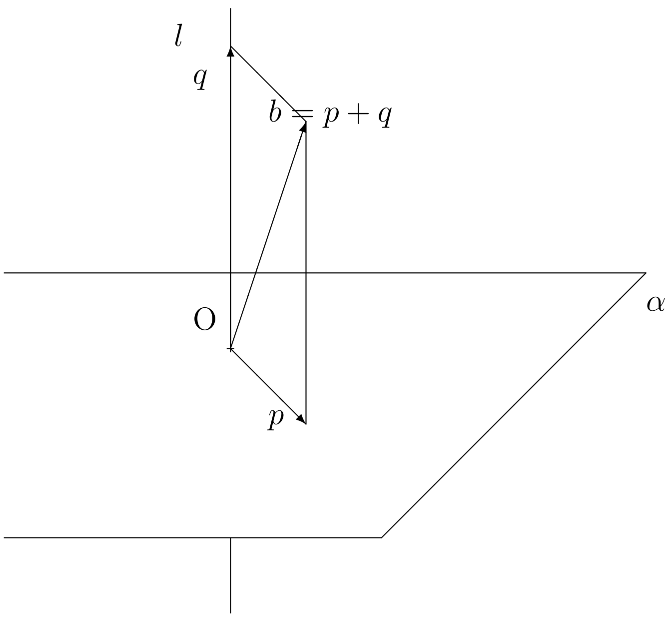
   $$v \perp w$$

   per indicare che v e w sono perpendicolari.

   Siano dati nello spazio un punto O e un piano α per O, e sia $l = \alpha^\perp$ la retta per O perpendicolare ad α. Ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma

   $$b = p + q$$

   di due vettori applicati in O, un vettore p sul piano α ed un vettore q sulla retta l. Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano α, e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta $l = \alpha^\perp$.



2. Fissato nelo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ con vettori applicati in O.

   Fatto

   Si puo' provare che due vettori $u = [u_i]_{i=1}^3$ e $v = [v_i]_{i=1}^3$, sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

   $$u \perp v \quad \textit{se e solo se} \quad u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

   Si osservi che secondo questa definizione il vettore nullo e' ortogonale ad ogni altro vettore; inoltre, il vettore nullo e' l'unico vettore che sia ortogonale a se' stesso.

   Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente:

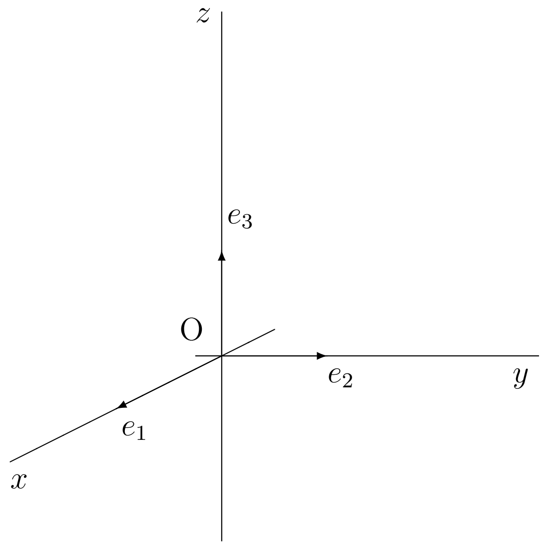
   $e_1 \perp e_2, \quad \textit{in quanto} \quad 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$

   $e_1 \perp e_3, \quad \textit{in quanto} \quad 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$

   $e_2 \perp e_3, \quad \textit{in quanto} \quad 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$

   Possiamo anche ritrovare che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z. Infatti, i primi sono del tipo $u = [u_i]_{i=1}^3$ con $u_3 = 0$, i secondi sono del tipo $v = [v_i]_{i=1}^3$ con $v_1 = v_2 = 0$, e si ha

   $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u_10 + u_20 + 0v_3 = 0.$



3. Verifichiamo ora algebricamente che

   > Dati nello spazio un punto O e un piano α per O, i vettori per O perpendicolari al piano α formano una retta $l = \alpha^\perp$, e ogni vettore b applicato in O si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma
   >
   > $$b = p + q$$
   >
   > di due vettori applicati in O, un vettore p sul piano α ed un vettore q sulla retta l.

Sappiamo che α e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 2. Siano $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$ due vettori che formino una base di α. Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix},$$

possiamo identificare il piano α con lo spazio delle colonne della matrice A :

$$\alpha = \mathcal{C}(A).$$

Chiaramente, $r(A) = 2$.

Cerchiamo i vettori $x = [x_i]_{i=1}^3$ che sono ortogonali ad a e b; questi vettori sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

in breve

$$A^T x = 0_2.$$

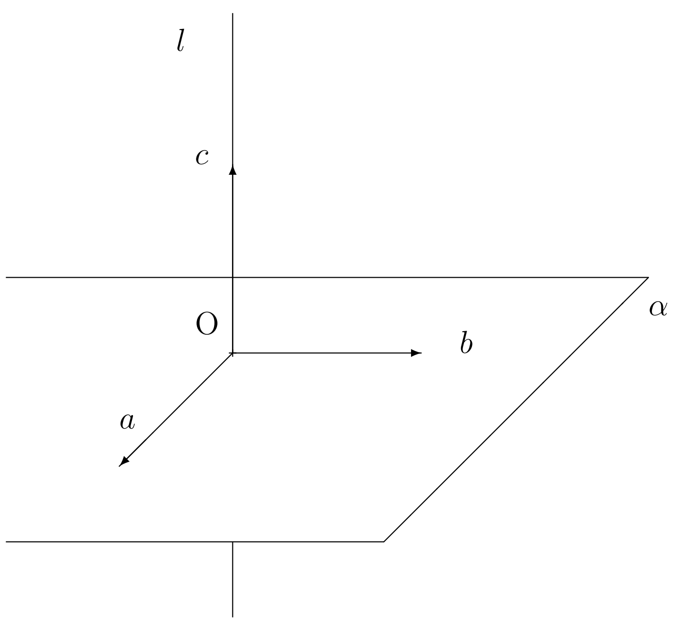
I vettori ortogonali al piano α formano dunque lo spazio nullo della matrice A^T :

$$\alpha = \mathcal{N}(A^T).$$

Ora, si ha

$$dim\left(\mathcal{N}(A^T)\right) = 3 - r(A^T) = 3 - r(A) = 3 - 2 = 1.$$

Abbiamo ritrovato cosi' che i vettori ortogonali ad un piano formano una retta, la indichiamo con l. La dimensione di l e' 1; sia $c = [c_i]_{i=1}^3$ un vettore che formi una base di l.



Ora verifichiamo che i vettori

$$a, b, c$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$. Poiche' il numero di questi vettori e' uguale alla dimensione dello spazio, basta verificare che sono linearmente indipendenti.

Consideriamo l'uguaglianza

$$ra + sb + tc = 0_3, \qquad r, s, t \in \mathbb{R}^3.$$

Possiamo riscrivela nella forma

$$ra + sb = -tc,$$

ed osservare che il vettore rappresentato dal valore comune dei due membri, dovendo stare sia su α che su l, deve essere ortogonale a se' stesso, dunque deve essere il vettore nullo. Cosi' si hanno le uguaglianze

$$ra + sb = 0_2, \qquad -tc = 0_2,$$

che, essendo a, b linearmente indipendenti ed essendo c linearmente indipendente, sono soddisfatte solo per

$$r = s = 0, \quad t = 0.$$

Abbiamo verificato che a, b, c sono una base di $\mathbb{R}^3$. Ora, ciascun vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$v = r_1 a + r_2 b + r_3 c, \qquad r_i \in \mathbb{R}$$

dei vettori a, b, c. Osserviamo che il vettore $r_1 a + r_2 b$ sta sul piano α e il vettore $r_3 c$ sta sulla retta l.

Abbiamo cosi' verificato che il vettore v si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di un vettore del piano α e di un vettore della retta l.

4. Una volta verificata la proprieta' algebricamente, siamo ora nella posizione di poterla estendere e provare in uno spazio $\mathbb{R}^n$, con n qualsiasi.