Matematica II, 26.02.04

Passiamo ora a considerare l'insieme

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3);\ x_1, x_2, x_3 \in R\},$$

costituito dalle terne ordinate di numeri reali. Ciascuna terna puo' essere pensata come un'unica entita', e venire denotata con una lettera minuscola sottolineata come $\underline{a}, \underline{b}, \ldots, \underline{x}, \ldots$ La terna nulla $(0,0,0)$ viene denotata col simbolo $\underline{0}$; per ogni terna $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, la terna $(-x_1, -x_2, -x_3)$ si denota $-\underline{x}$ e si dice terna opposta della $\underline{x}$.
La somma di due terne ed il prodotto di un numero reale per una terna vengono definite componente per componente:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3);$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Si ha dunque una struttura in cui compaiono entita' di due tipi, terne di numeri reali e singoli numeri reali, con due operazioni, somma di terne e prodotto di un numero per una terna, che producono terne. Queste operazioni hanno le usuali proprieta' del calcolo letterale, che per il momento non menzioniamo. Sottolineiamo invece l'utilita' che puo' avere il pensare le terne come entita' indivise e lo svolgere il calcolo su di esse.

Esempio Date $\underline{a} = (1, -2, 3)$ e $\underline{b} = (4, 5, -6)$, calcolare

$$2(\underline{a} + \underline{b}) - 3(2\underline{a} - \underline{b}).$$

Si puo' procedere sostituendo ai simboli $\underline{a}$ e $\underline{b}$ i loro valori e svolgendo i calcoli secondo le definizioni. D'altro canto si puo' procedere anche svolgendo prima i conti sui simboli delle terne, affidandosi qui alle proprieta' delle operazioni sulle terne, e poi sostituendo ai simboli i loro valori:

$$2(\underline{a} + \underline{b}) - 3(2\underline{a} - \underline{b}) = -4\underline{a} + 5\underline{b} = -4(1, -2, 3) + 5(4, 5, -6) = (16, 33, -42).$$

Esempio Date le terne $\underline{a} = (1, 2, -3)$ e $\underline{b} = (4, 0, 0)$, risolvere, se possibile, l'equazione

$$\underline{x} + \underline{a} = -\underline{x} + \underline{b}$$

nell'incognita $\underline{x}$. Si puo' trovare la soluzione ponendo $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, sostituendo ai simboli $\underline{a}$ e $\underline{b}$ i loro valori, svolgendo i calcoli a ciascun membro ... Risulta pero' piu' agevole risolvere simbolicamente l'equazione e poi sostituire:

$$\underline{x} + \underline{a} = -\underline{x} + \underline{b}; \qquad 2\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}; \qquad \underline{x} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a}) = \dots$$

Si puo' stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme R^3 delle terne ordinate di numeri reali e l'insieme dei punti dello spazio ordinario fissando un sistema di riferimento cartesiano, mettiamo ortogonale monometrico. Precisamente, fissata una terna ordinata di rette orientate incidenti in un punto O e mutuamente ortogonali, dette asse x_1, asse x_2, asse x_3, ed un segmento unita' di misura, per ogni data terna (a_1, a_2, a_3) in R^3 si considerano il punto A_1 di ascissa a_1 sull'asse x_1, il punto A_2 di ascissa a_2 sull'asse x_2, il punto A_3 di ascissa a_3 sull'asse x_3, poi il parallelepipedo individuato dagli spigoli OA_1, OA_2, OA_3, e si prende il vertice A opposto ad O. Dunque la terna ordinata (a_1, a_2, a_3) in R^3 puo' essere pensata come il punto A dello spazio ordinario. Risulta pero' spesso piu' adeguato pensarla come il segmento orientato OA.

I segmenti orientati con primo estremo O, detti solitamente vettori applicati in O, possono essere sommati fra loro e moltiplicati per numeri reali: la somma dei vettori OP e OQ viene definito come il vettore OR dato dalla diagonale che congiunge O col quarto vertice del parallelogramma individuato dai lati OP e OQ; il prodotto del numero reale α per il vettore OP viene definito come il vettore OS che rispetto a OP ha la stessa direzione, verso uguale od opposto secondoche α sia positivo o negativo, e lunghezza moltiplicata per $|\alpha|$.

Si verifica che queste operazioni sui vettori applicati vengono a rappresentare le operazioni definite sulle terne ordinate di numeri reali. Precisamente, date due terne qualunque $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in R^3 ed indicati con OA e OB i vettori applicati corrispondenti, si verifica che alla terna $\underline{a} + \underline{b}$ ottenuta sommando componente per componente $\underline{a}$ e $\underline{b}$ corrisponde il vettore applicato $OA + OB$ ottenuto sommando con la regola del parallelogramma OA e OB. Analogamente per l'operazione di moltiplicazione per un numero reale.

D'ora innanzi useremo i termini "terna ordinata di numeri reali" e "vettore" come sinonimi.

Problema Il vettore $\underline{v} = (1, -2, 7)$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{a} = (2, 4, -2)$, $\underline{b} = (1, 1, 2)$, $\underline{c} = (1, 0, 1)$? Se si, con quali pesi?

In sostanza, dobbiamo considerare l'equazione

$$x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} = \underline{v}$$

nelle incognite reali x, y, z, cioe'

$$x(2,4,-2) + y(1,1,2) + z(1,0,1) = (1,-2,7).$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione fra vettori

$$(2x + y + z, 4x + y, -2x + 2y + z) = (1,-2,7)$$

che equivale al sistema lineare di 3 equazioni

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +z & = & 1 \\ 4x & +y & & = & -2 \\ -2x & +2y & +z & = & 7 \end{array} \right.$$

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di eliminazione di Gauss. Ciascun passo del procedimento consiste nel sommare un multiplo di una equazione ad un'altra equazione: questa operazione lascia invariato l'insieme delle soluzioni del sistema, e puo' essere condotta in modo da eliminare una incognita.

Nel nostro caso, come primo passo possiamo eliminare l'incognita x dalla seconda equazione, sommandole -2 volte la prima equazione:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} 2x & +y & +z & & & & = & 1 & \\ 4x & +y & & -2(2x & +y & +z) & = & -2 & -2 \\ -2x & +2y & +z & & & & = & 7 & \end{array} \right.$$

ottenedo cosi'

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +z & = & 1 \\ & -y & -2z & = & -4 \\ -2x & +2y & +z & = & 7 \end{array} \right. ,$$

poi possiamo eliminare l'incognita x dalla terza equazione, sommandole la prima equazione, ed ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +z & = & 1 \\ & -y & -2z & = & -4 \\ & 3y & +2z & = & 8 \end{array} \right.$$

A questo punto abbiamo sostanzialmente ricondotto il problema della risoluzione del sistema di 3 equazioni in 3 incognite iniziale al problema della risoluzione di un sistema di 2 equazioni in 2 incognite.

Possiamo infine eliminare l'incognita y dalla terza equazione, sommandole 3 volte la seconda equazione, ed ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +z & = & 1 \\ & -y & -2z & = & -4 \\ & & -4z & = & -4 \end{array} \right.$$

Ora possiamo dalla terza equazione ricavare l'incognita z :

$$-4z = -4, \qquad z = 1,$$

nella seconda equazione sostituire il valore di z e ricavare l'incognita y :

$$-y - 2 = -4, \qquad y = 2,$$

nella prima equazione sostituire i valori di y e z e ricavare l'incognita x :

$$2x + 2 + 1 = 1, \qquad x = -1.$$

Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione:

$$(-1, 2, 1).$$

Cio' significa che

$$-\underline{a} + 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{v}$$

e' l'unico modo di scrivere il vettore $\underline{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

Si puo' osservare che i passi di eliminazione sono indipendenti dalla terna dei termini noti, cioe' avrebbero condotto da un sistema del tipo

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = & p \\ 4x & +y & & = & q \\ -2x & +2y & +z & = & r \end{cases}$$

ad in sistema del tipo

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = & p' \\ & -y & -2z & = & q' \\ & & -4z & = & r' \end{cases},$$

che ha sempre una ed una sola soluzione. Dunque ogni vettore di R^3 si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

Problema Il vettore $\underline{v} = (7, 8, 10)$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{a} = (1, 2, 3)$, $\underline{b} = (4, 5, 6)$? Se si, con quali pesi?

La risoluzione viene lasciata per esercizio. Mettiamo solo in evidenza il significato geometrico del problema. Fissato un sistema di riferimento nello spazio ordinario, con origine in un punto O, possiamo pensare ogni terna di numeri reali come un vettore applicato in O. Il problema ha soluzione se e solo se il vettore $\underline{v}$ giace nel piano individuato dai vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Infine, per ogni intero positivo $n = 1, 2, 3, \ldots$, consideriamo l'insieme

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\},$$

costituito dalle $n-$ple ordinate di numeri reali. Ciascuna $n-$pla puo' essere pensata come un'unica entita', e venire denotata con una lettera minuscola sottolineata come $\underline{a}, \underline{b}, \ldots, \underline{x}, \ldots$. Benche' per $n \geq 4$ non si ha una rappresentazione geometrica elementare di R^n, continueremo ad usare il termine "vettore" come sinonimo di "$n-$pla ordinata". La $n-$pla nulla $(0, 0, \ldots, 0)$ viene detta "vettore nullo" e denotata col simbolo $\underline{0}$; per ogni vettore $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il vettore $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ si denota con $-\underline{x}$ e viene detto "vettore opposto di $\underline{x}$."
La somma di vettori ed il prodotto di un numero reale per un vettore vengono definite componente per componente:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

In realta' abbiamo gia' fatto dei conti in R^4 senza saperlo. Questo deriva dal fatto che ogni equazione lineare nelle inconite x, y, z e' completamente individuata da una quaterna ordinata di numeri reali: coefficiente di x, coefficiente di y, coefficiente di z, e termine noto. Riconsideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = & 1 \\ 4x & +y & & = & -2 \\ -2x & +2y & +z & = & 7 \end{cases}$$

Il sistema e' completamente individuato dalla tabella, o matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

che nelle varie righe riporta i coefficienti delle incognite ed il termine noto delle varie equazioni, e dunque nelle varie colonne riporta i coefficienti delle varie incognite, ed infine i termini noti. La quarta colonna viene separata dalle precedenti proprio per il suo diverso significato.
Indicate con R_1, R_2, R_3 le righe della matrice

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array},$$

si puo' osservare come ogni passo nel processo di eliminazione e' consistitito in sostanza nel calcolo di una combinazione lineare di quaterne di numeri reali, secondo la definizione di somma di quaterne e di prodotto di un numero reale per una quaterna; ad esempio il primo passo e' consistito nel sommare alla seconda riga la prima moltiplicata per -2, :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 \end{array} .$$

Per finire, mettiamo in evidenza che un sistema lineare di m equazioni in n incognite si puo' interpretare come il problema in R^m della rappresentazione del vettore dei termini noti come combinazione lineare dei vettori dei coefficienti delle n incognite.

Esempio Il generico sistema lineare di 3 equazioni nelle incognite x, y

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_1x & +b_1y & = & c_1 \\ a_2x & +b_2y & = & c_2 \\ a_3x & +b_3y & = & c_3 \end{array}\right.$$

e' equivalente all'equazione

$$(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, a_3x + b_3y) = (c_1, c_2, c_3)$$

in R^3 che a sua volta si puo' scrivere come

$$x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3),$$

la quale puo' essere vista come il problema della rappresentazione del vettore $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ dei termini noti come combinazione lineare del vettore $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dei coefficienti della incognita x col vettore $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dei coefficienti della y, in sintesi come

$$x\underline{a} + y\underline{b} = \underline{c}.$$