Matematica II, 02.03.04

Ogni sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si puo' rappresentare nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \ldots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \ldots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \ldots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_m$ indicano numeri reali prefissati. Una soluzione di un tale sistema lineare e' una $n-$pla ordinata $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali che, sostituiti ordinatamente ai simboli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ delle incognite rendono vera ogni uguaglianza, cioe' tale che

$$\begin{cases} a_{11}s_1+ & a_{12}s_2+ & \ldots+ & a_{1n}s_n = & b_1 \\ a_{21}s_1+ & a_{22}s_2+ & \ldots+ & a_{2n}s_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}s_1+ & a_{m2}s_2+ & \ldots+ & a_{mn}s_n = & b_m \end{cases}.$$

Risolvere un sistema significa determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni. Un sistema lineare che non possiede soluzioni si dice inconsistente, un sistema lineare una ed una sola soluzione si dice determinato, un sistema lineare che possiede piu' di una soluzione si dice indeterminato. Due sistemi lineari si dicono equivalenti quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Uno dei modi di decidere se un sistema e' inconsistente, determinato, indeterminato e per risolverlo e' dato dal processo di eliminazione di Gauss, i cui passi sono dei seguenti tipi:

- sommare un multiplo di un'equazione ad un'altra equazione;
- scambiare due equazioni;
- moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.

Queste operazioni si dicono operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Ciascuna di esse trasforma un sistema in un altro sistema ad esso equivalente; cio' deriva al fondo dalla loro invertibilita'.

In generale, il processo di eliminazione di Gauss consiste nel sommare opportuni multipli della prima equazione alla seconda, terza, ..., ultima equazione, in modo da eliminare da esse la prima incognita x_1. Cosi' il sistema lineare iniziale di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ viene sostanzialmente ricondotto a un sistema di $m-1$ equazioni nelle $n-1$ incognite $x_2, \ldots, x_n$. Questo sistema viene a sua volta ricondotto a un sistema di $m-2$ equazioni nelle $n-2$ incognite $x_3, \ldots, x_n$; ... fino ad ottenere un sistema costituito da un'unica equazione. Nel corso del processo possono presentarsi, come vedremo, alcune eventualita' che richiedono qualche aggiustamento.

Il sistema lineare considerato e' univocamente determinato dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

che viene detta matrice completa del sistema.

Alle operazioni elementari sulle equazioni del sistema corrispondono le seguenti operazioni sulle righe $R_1, R_2, \ldots, R_m$ della sua matrice completa:

- sommare un multiplo di una riga ad un'altra riga, in simboli $R_i := R_i + \lambda R_j$;
- scambiare due righe, in simboli $R_i := R_j, \ R_j := R_i$;
- moltiplicare una riga per uno scalare non nullo, in simboli $R_i := \mu R_i$, con $\mu \neq 0$;

che vengono dette operazioni elementari per righe.

Al processo di eliminazione di Gauss corrisponde il processo che consiste nel sommare opportuni multipli della prima riga alla seconda, terza, ..., ultima riga, in modo da annullare tutti gli elementi della prima colonna al di sotto di a_{11}; nella matrice cosi' ottenuta si sommano opportuni multipli della seconda riga alla terza, ..., ultima riga, in modo da annullare tutti gli elementi della seconda colonna al di sotto di a_{22}; ... Nel corso del processo possono presentarsi, come vedremo, alcune eventualita' che richiedono qualche aggiustamento.

Consideriamo il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & p \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & q \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & r \\ -3x_1 & -5x_2 & -7x_3 & -4x_4 & -5x_5 & = & s \end{array}\right.,$$

dove i termini noti non sono specificati.

La matrice completa del sistema e'

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & r \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & s \end{array}\right].$$

Sommando opportuni multipli della prima riga alla seconda, terza e quarta riga si ottiene la nuova matrice

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & q-p \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & s+3p \end{array}\right],$$

che ha tutti gli elementi della prima colonna sotto il primo nulli. Ora, non si puo' usare la seconda riga per annullare gli elementi della seconda colonna al di sotto del secondo; possiamo pero' farlo se prima scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & q-p \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & s+3p \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & s+r+2p \end{array}\right].$$

Ora, non si puo' usare la terza riga per annullare gli elementi della terza colonna al di sotto del terzo, e non si puo' rimediare scambiando la terza riga con la quarta; possiamo pero' usare la terza riga per annullare gli elementi della quarta colonna al di sotto del terzo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & p \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s+r+q+p \end{array}\right].$$

A questo punto il processo sulla matrice e' terminato.

Il sistema lineare corrispondente e'

$$\left\{\begin{array}{cccccccr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & p \\ & -x_2 & -2x_3 & & & = & r-p \\ & & & +x_4 & +2x_5 & = & q-p \\ & & & & 0 & = & s+r+q+p \end{array}\right.,$$

che e' equivalente al sistema iniziale.

Ora, esistono soluzioni se e solo se i parametri rappresentativi dei termini noti soddisfano la condizione

$$s + r + q + p = 0.$$

Per semplicita', supponiamo ora che $p = 1, q = r = 0, s = -1$, dimodoche il sistema diviene

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ & -x_2 & -2x_3 & & & = & -1 \\ & & & +x_4 & +2x_5 & = & -1 \end{array} \right. .$$

Questo sistema puo' essere risolto esplicitando le incognite x_1, x_2, x_4, cioe' le prime incognite che compaiono nelle varie equazioni, in funzione delle altre

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +x_4 & = & -3x_3 & -x_5 & +1 \\ & -x_2 & & = & 2x_3 & & -1 \\ & & x_4 & = & & -2x_5 & -1 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & = & x_3 & +x_5 & \\ x_2 & = & -2x_3 & & +1 \\ x_4 & = & & -2x_5 & -1 \end{array} \right. .$$

La soluzione generale si ottiene uguagliando le incognite x_3 ed x_5 a parametri liberi; si puo' dunque dire che il sistema ammette una doppia infinita' di soluzioni, in breve ∞^2 soluzioni.

Per descrivere la portata generale del procedimento seguito nella discussione del sistema specifico considerato, dobbiamo introdurre un'adeguata terminologia.

Dato un vettore non nullo $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, indichiamo la prima componente non nulla di $\underline{a}$ col termine "pivot di $\underline{a}$." Data una matrice A e denotate le sue righe con $R_1, R_2, \ldots, R_m$, diciamo che A e' "a scala per righe" se il pivot di R_1 viene prima del pivot di R_2 che a sua volta viene prima del pivot di R_3 che a sua volta ...., ed infine si hanno eventualmente delle righe nulle.

Un sistema lineare "a scala" e' un sistema lineare in cui la prima incognita che compare nella prima equazione viene prima della prima incognita che compare nella seconda equazione che a sua volta viene prima della prima incognita che compare nella terza equazione che a sua volta ... ed infine si hanno eventualmente delle equazioni in cui non compare alcuna incognita. Si ha che un sistema lineare e' a scala se e solo se la matrice incompleta dei suoi coefficienti e' a scala per righe.

Possiamo ora enunciare i seguenti fatti generali

- ogni matrice si puo' trasformare, mediante operazioni elementari per righe, in una matrice a scala per righe;
- ogni sistema lineare si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle equazioni, in un sistema lineare a scala;
- ogni sistema lineare di m equazioni in n incognite e' equivalente ad un sistema lineare a scala, di m equazioni in n incognite.
- un sistema lineare a scala e' inconsistente se e solo se contiene un'equazione inconsistente, cioe' del tipo $0 = b$, con $b \neq 0$.