

Matematica II, 09.03.04

Il modo piu' semplice in cui una variabile reale puo' dipendere da una variabile reale e' la proporzionalita' diretta, in altri termini il tipo piu' semplice di funzione $f : R \rightarrow R$ e' dato da

$$f(x) = ax, \quad \text{per ogni } x \in R,$$

dove a e' una costante reale. Una tale funzione ha per grafico una retta passante per l'origine (con pendenza a), per questa ragione viene detta "lineare". Si osservi che f ha le seguenti proprieta':

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad f(\lambda v) = \lambda f(v),$$

per ogni $u, v, \lambda \in R$. Ora, queste proprieta' si possono definire, cambiando cio' che e' da cambiare, anche per funzioni di piu' variabili reali:

Definizione Una funzione $f : R^n \rightarrow R$ si dice *funzionale lineare* se soddisfa le condizioni

- $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$;
- $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$,

per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in R^n$ ed ogni $\lambda \in R$. Si osservi che nella prima condizione il simbolo $+$ compare con due significati diversi e, analogamente, i prodotti che compaiono nella seconda condizione sono di natura diversa.

Esempio. La funzione

$$f : R^2 \rightarrow R, \quad f((x_1, x_2)) = 2x_1 - 3x_2$$

e' un funzionale lineare. Verifica della prima proprieta': comunque siano dati due vettori $\underline{u} = (u_1, u_2)$ e $\underline{v} = (v_1, v_2)$ in R^2 si ha

$$f(\underline{u} + \underline{v}) = f((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = f((u_1 + v_1, u_2 + v_2)) = 2(u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2),$$

$$f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = f((u_1, u_2)) + f((v_1, v_2)) = 2u_1 - 3u_2 + 2v_1 - 3v_2,$$

e in entrambi i casi si ottiene lo stesso risultato. Verifica della seconda proprieta': comunque siano dati un vettore $\underline{v} = (v_1, v_2)$ in R^2 ed uno scalare $\lambda \in R$ si ha

$$f(\lambda \underline{v}) = f(\lambda(v_1, v_2)) = f((\lambda v_1, \lambda v_2)) = 2\lambda v_1 - 3\lambda v_2,$$

$$\lambda f(\underline{v}) = \lambda f((v_1, v_2)) = \lambda(2v_1 - 3v_2),$$

e in entrambi i casi si ottiene lo stesso risultato.

Si ricorda che il grafico di una funzione $f : A \rightarrow B$ da un insieme A verso un insieme B e' il sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito dalle coppie ordinate del tipo $(a, f(a))$ ottenute al variare di a nel dominio A :

$$\text{grafico di } f = \{(a, f(a)); a \in A\} \subset A \times B.$$

Dunque per una funzione $f : R^2 \rightarrow R$ si ha

$$\text{grafico di } f = \{(\underline{a}, f(\underline{a})); \underline{a} \in R^2\} \subset R^2 \times R = R^3.$$

Questo grafico puo' essere pensato intuitivamente come una superficie nello spazio. Se ne puo' dare anche una rappresentazione sommaria piana segnando accanto a certi punti del piano la corrispondente valutazione di f . Nell'esempio in esame si ha che

$$\text{grafico di } f = \{(x_1, x_2, 2x_1 - 3x_2); (x_1, x_2) \in R^2\} \subset R^2 \times R = R^3$$

e' un piano, passante per l'origine O del sistema di riferimento.

Esercizio Si verifichi che la funzione

$$f : R^2 \rightarrow R, \quad f((x_1, x_2)) = 2x_1 - 3x_2 + 1$$

non e' un funzionale lineare.

Esempio. In generale si ha che una qualsiasi funzione del tipo

$$f : R^n \rightarrow R, \quad f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n sono costanti reali, e' un funzionale lineare. In realta' questo e' l'esempio tipico, come mostrato dalla

Proposizione Se $f : R^n \rightarrow R$ e' un funzionale lineare, allora f si puo' rappresentare come

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

per opportune costanti reali a_1, a_2, \dots, a_n .

Prima di verificare questa proposizione, definiamo in R^n i vettori

$$\begin{aligned} \underline{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \underline{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Ogni vettore di $\underline{x} \in R^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori \underline{e}_i :

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n.$$

L'insieme $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ viene detto *base canonica di R^n* .

Verifica della Proposizione: per la proprieta' della base canonica si ha

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n),$$

e per la proprieta' di linearita' di f si ha

$$f(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n) = x_1 f(\underline{e}_1) + x_2 f(\underline{e}_2) + \dots + x_n f(\underline{e}_n);$$

basta dunque prendere $a_i = f(\underline{e}_i)$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Si noti che, in particolare, un funzionale lineare e' univocamente determinato dai valori che assume sui vettori della base canonica.

Usando la terminologia introdotta, si puo' rappresentare un sistema lineare di m equazioni in n incognite nella forma

$$f_i(\underline{x}) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

dove le $f_i : R^n \rightarrow R$ sono funzionali lineari.

Dati due qualsiasi vettori $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ in R^n , moltiplicando ogni componente u_i del primo per la rispettiva componente v_i del secondo e sommando i prodotti si ottiene un numero reale $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ che viene detto *prodotto scalare di \underline{u} per \underline{v}* :

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Utilizzando questa nozione si puo' rappresentare un qualsiasi funzionale lineare $f : R^n \rightarrow R$ nella forma

$$f(\underline{x}) = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle, \quad \text{per ogni } \underline{x} \in R^n,$$

dove \underline{a} e' una costante vettoriale in R^n .

Segnaliamo infine un primo aspetto geometrico del prodotto scalare:

Due vettori qualsiasi \underline{a} e \underline{b} in R^n , con $n = 2, 3$, sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\underline{a} \perp \underline{b} \Leftrightarrow \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0.$$