**Matematica II, 11.03.04**

**Problema** Descrivere le terne $(p, q, r)$ in $R^3$ tali che il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -4y & +3z & = & p \\ -2x & +5y & -3z & = & q \\ 3x & -6y & +3z & = & r \end{array}\right.$$

sia consistente.

Un primo modo di affrontare il problema consiste nel tentare di risolvere il sistema, fino al punto in cui eventualmente compaiano delle condizioni su $p, q, r$.

La matrice associata al sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 3 & p \\ -2 & 5 & -3 & q \\ 3 & -6 & 3 & r \end{array}\right]$$

puo' essere trasformata, mediante operazioni elementari per righe, nella matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 3 & p \\ 0 & -3 & 3 & q+2p \\ 0 & 0 & 0 & r+2q+p \end{array}\right],$$

cui corrisponde il sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -4y & +3z & = & p \\ & -3y & +3z & = & q+2p \\ & & 0 & = & r+2q+p \end{array}\right.,$$

che e' equivalente al sistema dato. Dunque il sistema dato e' consistente se e solo se la terna $(p, q, r)$ soddisfa la condizione

$$p + 2q + r = 0;$$

e si puo' notare che le terne che soddisfano questa condizione descrivono in $R^3$ un piano passante per l'origine. In base a questa descrizione, possiamo subito rispondere ald una domanda del tipo " la terna $(0, 0, 1)$ rende consistente il sistema?" La risposta e' negativa ...

Un secondo modo di affrontare il problema e' osservare che le terne $(p, q, r)$ che rendono consistente il sistema sono quelle che si ottengono dall'espressione

$$\left(\begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} x & -4y & +3z \\ -2x & +5y & -3z \\ 3x & -6y & +3z \end{array}\right),$$

al variare di $x, y, z$ in $R$. In base a questa descrizione, possiamo subito rispondere ad una richiesta del tipo " fornire qualche terna che renda consistente il sistema." Basta infatti assegnare un valore ad $x, y, z$, ad esempio $x = 1, y = 0, z = 0$, per potere affermare che la terna $(1, -2, 3)$ rende consistente il sistema.

Ora, l'espressione precedente puo' essere riscritta nella forma

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} z,$$

la quale, ponendo

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \underline{v}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{a}, \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \underline{b}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{c},$$

si puo' sintetizzare come

$$\underline{v} = \underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c}z.$$

Possiamo allora dire che le terne che rendono consistente il sistema dato sono tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$.

L'insieme $V$ di tutte le terne tali che il sistema lineare dato sia consistente puo' dunque essere descritto in due modi:

$$V = \{(p, q, r) \in R^3;\ p + 2q + r = 0\},$$

$$V = \{\underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c}z;\ x, y, z \in R\}.$$

Inoltre, $V$ puo' essere rappresentato geometricamente come l'insieme dei vettori applicati nell'origine $O$ che giacciono su un certo piano passante per $O$. Da questa sua rappresentazione risulta evidente che

- *comunque siano presi due vettori in $V$, anche la loro somma sta in $V$; in altri termini:*
$$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in V;$$
- *comunque siano presi un vettore in $V$ ed uno scalare in $R$, anche il prodotto dello scalare per il vettore sta in $V$; in altri termini:*
$$\underline{v} \in V, \lambda \in R \Rightarrow \underline{v}\lambda \in V.$$

In generale, un sottinsieme non vuoto di $R^n$ che possegga queste proprieta' si dice *spazio vettoriale.*

Verifichiamo algebricamente, usando la descrizione esplicita di $V$, la prima proprieta'. Assumere che $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ stiano in $V$ significa assumere che essi si possano rappresentare nella forma
$\underline{v}_1 = \underline{a}x_1 + \underline{b}y_1 + \underline{c}z_1,$
$\underline{v}_2 = \underline{a}x_2 + \underline{b}y_2 + \underline{c}z_2,$
per opportuni scalari $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$. Mostrare che il vettore $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ sta in $V$ significa mostrare che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ si puo' rappresentare nella forma
$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c}z,$
per opportuni scalari $x, y, z$. Ora si ha

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{a}x_1 + \underline{b}y_1 + \underline{c}z_1 + \underline{a}x_2 + \underline{b}y_2 + \underline{c}z_2 = \underline{a}(x_1 + x_2) + \underline{b}(y_1 + y_2) + \underline{c}(z_1 + z_2).$$

Basta dunque prendere $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2, z = z_1 + z_2$.

**Esempio.** In $R^3$ si hanno i seguenti spazi vettoriali, descritti geometricamente:

- l'intero spazio;
- i piani passanti per l'origine $O$;
- le rette passanti per l'origine $O$;
- l'origine $O$.

L'insieme
$$V = \{\underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c}z;\ x, y, z \in R\}$$
da cui siamo partiti e' un esempio tipico di spazio vettoriale, nel senso della seguente

**Proposizione.** *Comunque siano presi un numero finito di vettori $\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \ldots,\ \underline{a}_p$, in $R^n$, l'insieme*

$$\{\underline{a}_1\alpha_1 + \underline{a}_2\alpha_2 + \cdots + \underline{a}_p\alpha_p;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in R\}$$

*di tutte le loro combinazioni lineari e' uno spazio vettoriale, il piu' piccolo spazio vettoriale contenente l'insieme $\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \ldots,\ \underline{a}_p\} = A$; viene detto spazio generato dall'insieme $A$, e viene indicato con*

$$Span(A).$$

Noi abbiamo mostrato che l'insieme $Span(\{\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}\})$ di tutte le combinazioni lineari dei vettori $\underline{a} = (1, -2, 3),\ \underline{b} = (-4, 5, -6),\ \underline{c} = (3, -3, 3)$ in $R^3$ e' uno spazio vettoriale; nel fare cio' non abbiamo in realta' usato ne' il fatto che $\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}$ fossero proprio quei vettori ne' il fatto che facessero parte di $R^3$. Dunque abbiamo mostrato che l'insieme $Span(\{\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}\})$ di tutte le combinazioni lineari di tre vettori in $R^n$ e' uno spazio vettoriale. La verifica nel caso di un numero finito qualsiasi $p$ di vettori e' analoga.

Lo spazio $Span(A)$ contiene l'insieme $A = \{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \ldots,\ \underline{a}_p\}$ in quanto il vettore $\underline{a}_i$ si puo' ottenere come la combinazione lineare

$$\underline{a}_1 0 + \cdots \underline{a}_{i-1} 0 + \underline{a}_i 1 + \underline{a}_{i+1} 0 + \cdots + \underline{a}_p 0$$

in cui tutti i pesi sono nulli tranne l'$i-$mo, che vale 1. Anche il vettore nullo $\underline{0}$ appartiene a $Span(A)$, in quanto si puo' ottenere come la combinazione lineare in cui tutti i pesi sono nulli. Non verifichiamo che $Span(A)$ e' il piu' piccolo spazio vettoriale contenente $A$.

Lo spazio vettoriale $R^n$ si puo' vedere come lo spazio generato dai vettori della base canonica di $R^n$ :

$$R^n = Span(\{\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \ldots,\ \underline{e}_n\}).$$

In realta' ogni vettore di $R^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori della base canonica di $R^n$. L'accezione generale del termine "base" e' data dalla seguente

**Definizione** *Un sottinsieme $B = \{\underline{b}_1,\ \underline{b}_2,\ \ldots,\ \underline{b}_p\}$ di un insieme $V \subseteq R^n$ si dice base di $V$ se ogni $\underline{v} \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori in $B$ :*

$$\underline{v} =^! \underline{b}_1\beta_1 + \underline{b}_2\beta_2 + \cdots + \underline{b}_p\beta_p.$$

*Il peso $\beta_i$ viene detto coordinata del vettore $\underline{v}$ rispetto al vettore $\underline{b}_i$ delle base $B$.*

**Esempio** L'insieme $\{\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}\}$ non e' una base per lo spazio $V = Span(\{\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}\})$ da esso generato. Infatti, se e vero che ogni vettore di $V$ si puo' scrivere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c}$, non e' pero' vero che tale scrittura e' sempre unica. Infatti per il vettore nullo $\underline{0} \in V$ si hanno le due diverse scritture

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} 0,$$
$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} 1.$$

Si puo' osservare che i vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ non sono proporzionali, dunque individuano due rette distinte passanti per $O$ e contenute in $V$ : e' allora possibile dare una costruzione geometrica che permette di scrivere ogni vettore $\underline{v} \in V$ in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Dunque l'insieme $\{\underline{a},\ \underline{b}\ \}$ e' una base per lo spazio $V$.

Algebricamente, dobbiamo mostrare che l'equazione nelle incognite $\alpha$ e $\beta$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

ha una ed una sola soluzione, per ogni terna di parametri $p, q, r$ legati dalla condizione

$$p + 2q + r = 0.$$

L'equazione corrisponde al sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} \alpha & -4\beta & = & p \\ -2\alpha & +5\beta & = & q \\ 3\alpha & -6\beta & = & r \end{cases}$$

La matrice associata al sistema

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & -4 & p \\ -2 & 5 & q \\ 3 & -6 & r \end{array}\right]$$

puo' essere trasformata, mediante operazioni elementari per righe, nella matrice

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -4 & p \\ 0 & -3 & q + 2p \\ 0 & 0 & r + 2q + p \end{array}\right],$$

cui corrisponde il sistema

$$\begin{cases} \alpha & -4\beta & = & p \\ & -3\beta & = & q + 2p \\ & 0 & = & r + 2q + p \end{cases},$$

che in effetti ha una ed una sola soluzione per ogni terna di parametri $p, q, r$ legati dalla condizione $p + 2q + r = 0$. Precisamente, l'unica soluzione e'

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4q + 5p \\ q + 2p \end{pmatrix}.$$