Matematica II, 16.03.04

Fissato nello spazio un sisstema di riferimento, con origine in un certo punto O, possiamo intuitivamente parlare di uno, oppure due, oppure tre vettori "in posizione generale". Si puo' precisare questa nozione nel modo seguente.

- Un vettore $\underline{v}_1$ in posizione generale e' un qualsiasi vettore diverso dal vettore nullo $\underline{0}$.
- Due vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono in posizione generale se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e $\underline{v}_2$ non giace sulla retta individuata da $\underline{v}_1$, in altri termini $\underline{v}_2$ non e' un multiplo scalare di $\underline{v}_1$.
- Tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono in posizione generale se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, $\underline{v}_2$ non e' un multiplo scalare di $\underline{v}_1$, e $\underline{v}_3$ non giace sul piano individuato da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, cioe' $\underline{v}_3$ non e' combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Se tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$, sono in posizione generale, si ha che

$$\underline{v}_1 0 + \underline{v}_2 0 + \underline{v}_3 0 = \underline{0}$$

e' l'unica combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ il cui risultato e' il vettore nullo $\underline{0}$. Infatti, dati tre scalari $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ tali che

$$\underline{v}_1\beta_1 + \underline{v}_2\beta_2 + \underline{v}_3\beta_3 = \underline{0},$$

si puo' osservare quanto segue. Se β_3 non fosse nullo, si potrebbe da questa relazione ricavare $\underline{v}_3$ come combinazione lineare

$$\underline{v}_3 = -\underline{v}_1\frac{\beta_1}{\beta_3} + -\underline{v}_2\frac{\beta_2}{\beta_3},$$

di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, contro quanto assunto; dunque si deve avere $\beta_3 = 0$, e

$$\underline{v}_1\beta_1 + \underline{v}_2\beta_2 = \underline{0}.$$

Ora, se β_2 non fosse nullo, si potrebbe da questa relazione ricavare $\underline{v}_2$ come multiplo scalare

$$\underline{v}_2 = -\underline{v}_1\frac{\beta_1}{\beta_2},$$

di $\underline{v}_1$, contro quanto assunto; dunque si deve avere $\beta_2 = 0$, e

$$\underline{v}_1\beta_1 = \underline{0}.$$

Infine, se β_1 non fosse nullo, si avrebbe

$$\underline{v}_1 = \underline{0},$$

contro quanto assunto; dunque si deve avere anche $\beta_3 = 0$.

Si puo' provare che vale anche il viceversa.

Queste considerazioni conducono alla seguente

Definizione. *I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ dello spazio vettoriale R^n si dicono linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ il cui risultato e' il vettore nullo $\underline{0}$ e' quella in cui tutti i pesi sono nulli. In altri termini se*

$$\underline{v}_1\beta_1 + \underline{v}_2\beta_2 + \cdots + \underline{v}_p\beta_p = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0.$$

Dunque i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ non sono linearmente indipendenti se esiste una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ il cui risultato e' il vettore nullo $\underline{0}$ nella quale qualche peso non e' nullo. In questo caso si dice che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ sono linearmente dipendenti.

Si osservi che la proprieta' di essere linearmente indipendenti (dipendenti) non dipende dall'ordine in cui vengono elencati i vettori.

In generale, vale la seguente

Proposizione. *I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ dello spazio vettoriale R^n sono linearmente indipendenti se e solo se*

- $\underline{v}_1 \neq 0$;
- $\underline{v}_2 \notin Span(\underline{v}_1)$;
- $\underline{v}_3 \notin Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$;
- $\ldots$;
- $\underline{v}_p \notin Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{p-1})$.

Esercizio. Si verifichi se i seguenti due vettori dello spazio vettoriale R^3

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

In base alla definizione, dobbiamo chiederci se l'equazione

$$\underline{v}_1\alpha_1 + \underline{v}_2\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ha come unica soluzione la coppia $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$. Ora, questa equazione vettoriale e' equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 & +4\alpha_2 = & 0 \\ 2\alpha_1 & +5\alpha_2 = & 0 \\ 3\alpha_1 & +6\alpha_2 = & 0 \end{cases},$$

che e' equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 & +4\alpha_2 = & 0 \\ & -3\alpha_2 = & 0 \end{cases},$$

che ha l'unica soluzione $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$.

In alternativa, si sarebbe potuto osservare che $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e che $\underline{v}_2$ non e' proporzionale a $\underline{v}_1$ ed affermare, in base alla proposizione, che i due vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio. Si verifichi se i seguenti tre vettori dello spazio vettoriale R^3

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

In base alla definizione, dobbiamo chiederci se l'equazione

$$\underline{v}_1\alpha_1 + \underline{v}_2\alpha_2 + \underline{v}_3\alpha_3 = \underline{0}$$

ha come unica soluzione la terna $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Ora, questa equazione vettoriale e' equivalente al sistema lineare che ha matrice dei coefficienti

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right],$$

la quale si puo' trasformare, mediante operazioni elementari per righe, nella matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

cui corrisponde un sistema lineare con infinite soluzioni. Dunque i tre vettori dati sono linearmente dipendenti. Una combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ con risultato il vettore nullo nella quale compare qualche peso non nullo e' data da

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2(-2) + \underline{v}_3 = \underline{0}.$$

Esercizio. I seguenti tre vettori dello spazio vettoriale R^5

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti?

Proposizione. *p vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p$ dello spazio vettoriale R^n, con $p > n$, sono sempre linearmente dipendenti.*

Verifichiamo per sommi capi questa affermazione. Rappresentati i vettori dati nella forma

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{v}_p = \begin{pmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{pmatrix},$$

l'equazione vettoriale

$$\underline{v}_1\beta_1 + \underline{v}_2\beta_2 + \cdots + \underline{v}_p\beta_p = \underline{0}$$

si traduce nel sistema lineare avente per matrice dei coefficienti

$$\left[\begin{array}{cccc|c} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1p} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2p} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{np} & 0 \end{array}\right].$$

Questa matrice puo' essere trasformata mediante operazioni elementari in una matrice a scala per righe, la quale avra' un numero $m \leq n$ di righe non nulle. Supponiamo, per semplicita', che i pivot delle varie righe di questa matrice siano nei posti $(1,1),\ (2,2),\ldots,(m,m)$. In questo caso la matrice a scala sara' del tipo

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1m} & w_{1,m+1} & \ldots & w_{1p} & & 0 \\ 0 & w_{22} & \ldots & w_{2m} & w_{2,m+1} & \ldots & w_{2p} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{mm} & w_{m,m+1} & \ldots & w_{mp} & & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Si osservi che, essendo $m \leq n < p$, in questa matrice dovra' esserci almeno una colonna in cui non compare alcun pivot. Il sistema corrispondente potra' essere risolto esplicitando le prime m incognite $\beta_1,\ldots,\beta_m$ in funzione delle rimanenti incognite $\beta_{m+1},\ldots\beta_p$ ed uguagliando queste ultime a parametri liberi $t_{m+1},\ldots t_p$. Dunque il sistema possiede infinite soluzioni, ed esistono infinite combinazioni lineari dei vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_p$ aventi per risultato il vettore nullo $\underline{0}$. Fra queste, ad esempio, se ne avra' una del tipo

$$\underline{v}_1\beta_1 + \cdots + \underline{v}_m\beta_m + \underline{v}_{m+1} + \cdots + \underline{v}_p\beta_p = \underline{0}.$$