Matematica II, 23.03.04

Nell'esercizio 2 della III settimana si chiedeva, tra l'altro, di determinare una base per lo spazio vettoriale V costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x + y + z = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione e' del tipo

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ -h-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} k = \underline{a}h + \underline{b}k.$$

Possiamo allora subito dire che ogni vettore di V si puo' scrivere *in almeno un modo* come combinazione lineare dei vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Per verificare se questi due vettori costituiscono una base per V, rimane allora da verificare che ogni vettore di V si puo' scrivere *in un solo modo* come combinazione lineare di $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Questa considerazione suggerisce di distinguere nel concetto di base due aspetti.

Dato un sottinsieme $A = \{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p,\ \}$ di un insieme V contenuto in uno spazio R^n,

- si dice che A *genera* l'insieme V se ogni vettore $\underline{v} \in V$ si puo' scrivere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori di A; in simboli, se
$$V \subseteq Span(A).$$
- si dice inoltre (cfr. la lezione precedente) che A e' *linearmente indipendente* se il vettore nullo $\underline{0}$ si puo' scrivere in un solo modo come combinazione lineare dei vettori di A.

  Si osservi che, in questo caso, ogni vettore $\underline{v} \in R^n$ si puo' scrivere in al piu' un modo come combinazione lineare dei vettori di A. Infatti, date due tali scritture
$$\underline{v} = \underline{v}_1\alpha_1 + \underline{v}_2\alpha_2 + \ldots + \underline{v}_p\alpha_p, \qquad \underline{v} = \underline{v}_1\beta_1 + \underline{v}_2\beta_2 + \ldots + \underline{v}_p\beta_p,$$
  sottraendo membro a membro, si ottiene la scrittura
$$\underline{0} = \underline{v}_1(\alpha_1 - \beta_1) + \underline{v}_2(\alpha_2 - \beta_2) + \ldots + \underline{v}_p(\alpha_p - \beta_p),$$
  dalla quale, per l'indipendenza lineare di A si ottiene
$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_p - \beta_p = 0,$$
  cioe'
$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_p = \beta_p.$$

Possiamo dunque stabilire la seguente

Ridefinizione. *Un sottinsieme B di un insieme V contenuto in uno spazio R^n si dice base di V se*

- *B genera V e*
- *B e' linearmente indipendente.*

Esercizio Riprendiamo, da questo punto di vista, l'esercizio 3 della III settimana, in cui si chiedeva di determininare una base per lo spazio $Span(A)$ generato dall'insieme $A = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}$ delle colonne della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo l'insieme $B = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}\}$ costituito dalla prima, seconda e quarta colonna della matrice ed osserviamo che: B e' linearmente indipendente, in quanto $\underline{a} \neq \underline{0}$, e $\underline{b} \notin Span(\{\underline{a}\})$, e $\underline{d} \notin Span(\{\underline{a},\ \underline{b}\})$; B genera l'insieme A, in quanto $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$; dunque B e' una base per A. Ora, dal fatto che B genera A segue che B genera anche lo spazio $Span(A)$ generato dall'insieme A. Dunque B e' anche una base per $Span(A)$.

Lo spazio R^n possiede almeno una base: la base canonica $\{\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \ldots,\ \underline{e}_n\}$. In realta' si ha, piu' in generale

Teorema *Ogni sottinsieme non vuoto V di uno spazio R^n possiede almeno una base*

Consideriamo il caso in cui l'insieme V non sia ridotto al solo vettore nullo.

- Possiamo prendere un vettore $\underline{v}_1 \in V$, con $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$; chiaramente $\underline{v}_1$ e' linearmente indipendente. Ora, se $Span(\{\underline{v}_1\}) \supseteq V$, allora $\{\underline{v}_1\}$ e' una base di V.
- Se invece $Span(\{\underline{v}_1\}) \not\supseteq V$, allora possiamo prendere un vettore $\underline{v}_2 \in V$, con $\underline{v}_2 \notin Span(\{\underline{v}_1\})$; chiaramente $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Ora, se $Span(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}) \supseteq V$, allora $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ e' una base di V.

- Se invece $Span(\{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2\}) \not\supseteq V$, allora possiamo prendere un vettore $\underline{v}_3 \in V$, con $\underline{v}_3 \notin Span(\{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2\})$; chiaramente $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti. Ora, se $Span(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ \underline{v}_3\}) \supseteq V$, allora $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ \underline{v}_3\}$ e' una base di V.
- ... Il processo terminera' dopo al piu' n passi, in quanto in R^n non ci possono essere $n+1$ vettori linearmente indipendenti, e fornira' una base di V.

Se V e' ridotto al vettore nullo, si prende come base di V l'insieme vuoto $\emptyset$.

In modo simile si prova che

Teorema *Se A e' un sottinsieme linearmente indipendente di un insieme non vuoto V di uno spazio R^n, allora A si puo' essere esteso ad una base di V.*

Esercizio Determinare una base per l'insieme V delle colonne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ della matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si puo' osservare che $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e che $\underline{v}_2$ non e' un multiplo scalare di $\underline{v}_1$; dunque i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Si e' portati allora a chiedersi se $\underline{v}_3$ e' combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$; cio' significa chiedersi se l'equazione

$$\underline{v}_1\alpha + \underline{v}_2\beta = \underline{v}_3$$

abbia soluzione o meno. Questa equazione si traduce nel sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} -\alpha & +\beta & = & 3 \\ \alpha & -\beta & = & -3 \\ \alpha & +\beta & = & 1 \\ \alpha & +\beta & = & 1 \end{array} \right. \quad cioe' \quad \left\{ \begin{array}{rrcr} -\alpha & +\beta & = & 3 \\ \alpha & +\beta & = & 1 \end{array} \right.$$

che ha soluzione $\alpha = -1, \beta = 2$. Dunque

$$\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 \in Span(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}).$$

Si e' portati allora a chiedersi se $\underline{v}_4$ e' combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$; cio' significa chiedersi se l'equazione

$$\underline{v}_1\alpha + \underline{v}_2\beta = \underline{v}_4$$

abbia soluzione o meno. Questa equazione si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} -\alpha & +\beta & = & 1 \\ \alpha & -\beta & = & 1 \\ \alpha & +\beta & = & -1 \\ \alpha & +\beta & = & 1 \end{cases}$$

che e' inconsistente. Dunque

$$\underline{v}_4 = \notin Span(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}).$$

e i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti. Si e' portati allora a chiedersi se $\underline{v}_5$ e' combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$; cio' significa chiedersi se l'equazione

$$\underline{v}_1\alpha + \underline{v}_2\beta + \underline{v}_4\gamma = \underline{v}_5$$

abbia soluzione o meno. Questa equazione si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} -\alpha & +\beta & +\gamma & = & 0 \\ \alpha & -\beta & +\gamma & = & 6 \\ \alpha & +\beta & -\gamma & = & -4 \\ \alpha & +\beta & +\gamma & = & 2 \end{cases}$$

che ha soluzione $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 3$. Dunque

$$\underline{v}_5 = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 3\underline{v}_4 \in Span(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4\}).$$

e i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ formano una base per l'insieme V.

In generale, il processo appena descritto risulta alquanto laborioso. Descriviamo di seguito, riferendoci sempre allo stesso esercizio, un metodo per risolvere in modo efficiente il problema di determinare una base per l'insieme delle colonne di una matrice. Questo metodo e' basato sul seguente fatto:

- *Ciascuna operazione elementare sulle righe di una matrice conserva tutte le relazioni lineari che sussistono fra le colonne della matrice, cioe' conserva le relazioni del tipo "nella tal colonna compare un vettore che e' combinazione lineare, con certi pesi, dei vettori che compaiono nelle talaltre colonne", e tutte le relazioni che da esse derivano.*

L'insieme V di cui si chiede di determinare una base e' costituito dalle colonne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$ della matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Questa matrice si puo' trasformare, mediante le operazioni elementari per righe prescritte dall'algoritmo di Gauss, nella matrice a scala per righe

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di piu', mediante ulteriori opportune operazioni elementari per righe, si puo' fare in modo che ciascun pivot diventi 1 e sia l'unico elemento non nullo della colonna in cui compare, e si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matrice di questo tipo viene detta *matrice a scala ridotta per righe.* Indichiamo le colonne di questa matrice con $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_3, \underline{v}'_4, \underline{v}'_5$.

Osserviamo che le colonne $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_4$ in cui compaiono i pivot sono linearmente indipendenti e che valgono le seguenti relazioni lineari

$$\underline{v}'_3 = -\underline{v}'_1 + 2\underline{v}'_2, \qquad \underline{v}'_5 = \underline{v}'_1 - 2\underline{v}'_2 + 3\underline{v}'_4.$$

Dunque possiamo affermare che le colonne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ della matrice di partenza sono linearmente indipendenti e che valgono le relazioni lineari

$$\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \qquad \underline{v}_5 = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 3\underline{v}_4.$$

Cio' significa che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$ costituiscono una base per l'insieme V.