Matematica II, 25.03.04

Il numero di elementi di un insieme finito A viene detto *cardinalita'* di A, e viene indicato spesso con $\#A$. Abbiamo visto che

- *se A e' un sottinsieme di R^n avente cardinalita' $\#A > n$, allora A e' linearmente dipendente.*

In realta' si ha pure che

- *se A e' un sottinsieme di R^n avente cardinalita' $\#A < n$, allora A non genera R^n.*

Verifichiamo questo fatto nel caso di un insieme di tre vettori $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ in R^4. Consideriamo la matrice

$$\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{bmatrix}$$

nelle cui colonne compaiono i vettori dati. Mediante operazioni elementari per righe, possiamo trasformare questa matrice in una matrice a scala per righe

$$\begin{bmatrix} \underline{a}' & \underline{b}' & \underline{c}' \end{bmatrix}$$

Osserviamo che in questa matrice ci saranno al piu' 3 pivot - in quanto i pivot stanno in colonne distinte e ci sono 3 colonne-, dunque ci saranno al piu' 3 righe non nulle, e la quarta riga sara' nulla. Accostando a questa matrice il quarto vettore $\underline{e}_4$ della base canonica di R^4 si ottiene una matrice

$$\begin{bmatrix} \underline{a}' & \underline{b}' & \underline{c}' & \underline{e}_4 \end{bmatrix}$$

in cui la quarta colonna non e' combinazione lineare delle prime 3. Questa matrice puo' essere trasformata, mediante operazioni elementari per righe, in una matrice

$$\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{e}' \end{bmatrix}$$

nelle cui prime 3 colonne compaiono i vettori dati $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, e si avra' che nella quarta colonna di questa matrice comparira' un vettore $\underline{e}'$ che non e' loro combinazione lineare.

Dai fatti messi in evidenza segue che

- *Tutte le basi di R^n hanno la cardinalita' n.*

Piu' in generale, si ha

Teorema. *Tutte le basi di uno stesso sottinsieme non vuoto V contenuto in uno spazio R^n hanno la stessa cardinalita'. Questa cardinalita' viene detta rango dell'insieme V e viene indicata con $r(V)$. Se V e' uno spazio vettoriale, si preferisce parlare di dimensione di V e si usa la notazione $dim(V)$.*

Esempio Lo spazio vettoriale R^n ha dimensione n; il suo sottospazio $\{\underline{0}\}$ ridotto al vettore nullo ha dimensione 0. Nello spazio vettoriale R^3, descritto geometricamente, si ha che: l'intero spazio ha dimensione 3; i piani passanti per l'origine O hanno dimensione 2; le rette passanti per l'origine O hanno dimensione 1; l'insieme ridotto all'origine O ha dimensione 0.

Esempio Nell'esercizio 3 della IV settimana era data la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indichiamo con $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \ldots, \underline{g}$ le sue colonne e con V l'insieme da esse formato. Osserviamo che i vettori $\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}$ che compaiono in seconda, terza e quinta colonna sono linearmente indipendenti. In realta', essi generano l'insieme V. Infatti, mediante operazioni elementari per righe, la matrice si puo' trasformare in una matrice a scala ridotta, che sara' del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove i simboli $*$ indicano elementi non specificati. In questa matrice si vede che ogni colonna e' combinazione lineare della seconda, terza e quinta colonna. Lo stesso varra' dunque per la matrice di partenza. In definitiva, l'insieme $\{\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}\}$ e' una base per l'insieme V, e si ha $r(V) = 3$. Lo stesso insieme sara' pure una base per lo spazio $W = Span(V)$ generato da V e si avra $dim(W) = 3$.

La dimostrazione del teorema non viene riportata, ne mettiamo invece in evidenza una sua importante conseguenza

Teorema *Dato un insieme non vuoto V di rango p contenuto in uno spazio R^n, per ogni sottinsieme A di cardinalita' p contenuto in V, si ha che le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *A e' linearmente indipendente;*
- *A genera V.*

In altri termini, per verificare se A e' una base di V, basta verificare che A sia linearmente indipendente, oppure che A generi V.

Verifichiamo che, se A e' linearmente indipendente, allora genera V. Se cosi' non fosse, ci sarebbe un vettore $\underline{v}^*$ in V tale che $\underline{v}^* \notin Span(A)$. Dunque l'insieme $A \cup \{\underline{v}^*\}$ sarebbe linearmente indipendente, e si potrebbe estendere ad una base di V, che avrebbe cardinalita' $> p$, contro il fatto che tutte le basi di V hanno cardinalita' p.

Esempio Abbiamo visto che l'insieme V delle colonne $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots, \underline{g}$ della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 3. Osserviamo che ciascuno degli insiemi

$$\{\underline{b}, \underline{c}, \underline{f}\}, \quad \{\underline{b}, \underline{c}, \underline{g}\}, \quad \{\underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\},$$

di cardinalita' 3 contenuti nell'insieme V e' linearmente indipendente; in base al precedente teorema, possiamo dunque affermare che ciascuno di questi insiemi e' pure una base per l'insieme V. Possiamo anche affermare che l'insieme

$$\{\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}\},$$

non essendo linearmente indipendente, non genera V.

Una matrice individua due insiemi di vettori: l'insieme delle sue colonne e l'insieme delle sue righe. Viene allora naturale confrontarne i ranghi.

Esempio Consideriamo una matrice con due righe e due colonne

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

dove supponiamo per semplicita' che tutti gli elementi a, b, c, d siano non nulli.

Le sue colonne

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti se e solo se una e' multiplo scalare dell'altra, cioe' se esiste un numero reale α tale che

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \alpha, \quad cioe' \quad \begin{cases} b & = & \alpha a \\ d & = & \alpha c \end{cases},$$

equivalentemente se e solo se

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}, \quad cioe' \quad ad - bc = 0.$$

Le sue righe

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti se e solo se una e' multiplo scalare dell'altra, cioe' se esiste un numero reale β tale che

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \quad cioe' \quad \begin{cases} c & = & \beta a \\ d & = & \beta b \end{cases},$$

equivalentemente se e solo se

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \quad cioe' \quad ad - bc = 0.$$

Riassumendo, si ha che le colonne sono linearmente dipendenti se e solo se le righe sono linearmente dipendenti; in altri termini, si ha che le colonne sono linearmente indipendenti se e solo se le righe sono linearmente indipendenti.

Cio' significa che il rango dell'insieme delle due colonne e' 2 se e solo se il rango dell'insieme delle due righe e' 2. Approfonendendo l'analisi, si puo' mostrare che il rango dell'insieme delle colonne e' sempre uguale al rango dell'insieme delle righe. Questa e' l'istanza di un fatto generale, stabilito dal seguente

Teorema *Per ogni matrice A con m righe ed n colonne*

$$A = \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \vdots \\ \underline{r}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \dots & \underline{c}_n \end{bmatrix}, \qquad \underline{r}_i \in R^n, \quad \underline{c}_j \in R^m,$$

l'insieme delle righe e l'insieme delle colonne hanno lo stesso rango:

$$r(\{\underline{r}_1, \ \underline{r}_2, \ \dots, \ \underline{r}_m\}) = r(\{\underline{c}_1, \ \underline{c}_2, \ \dots, \ \underline{c}_n\}).$$

Questo valore comune viene detto rango della matrice A e viene indicato con

$$r(A).$$

Ritorneremo ancora su questo importante teorema.