Matematica II, 20.04.04

Una matrice con m righe ed n colonne si dice, in breve, matrice di tipo m per n; per indicare che una matrice A ha tipo m per n si usa scrivere

$$A_{m\times n}.$$

Una matrice con una sola riga, cioe' una matrice di tipo $1 \times n$ si dice vettore riga, una matrice con una sola colonna, cioe' una matrice di tipo $m \times 1$ si dice vettore colonna.

I dati che caratterizzano un'equazione lineare in due incognite

$$2x - 3y = 1$$

sono le incognite, che viene naturale rappresentare come un vettore colonna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

i loro coefficienti, che viene naturale rappresentare come un vettore riga

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix},$$

ed il termine noto, che e' in questo caso il numero 1. Viene allora naturale porre

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x - 3y,$$

in modo da poter scrivere l'equazione data nella forma

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

Siamo cosi' portati a definire il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna, che abbiano lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto sommando i prodotti delle varie componenti del vettore riga per le corrispondenti componenti del vettore colonna:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

In questo modo, la generica equazione lineare in n incognite

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

si puo' scrivere nella forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b.$$

Ponendo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} = A_{1\times n}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X_{n\times 1},$$

si ha la rappresentazione sintetica

$$A_{1\times n}X_{n\times 1} = b.$$

I dati che caratterizzano un sistema di due equazioni lineari in tre incognite

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & 3z = & 7 \\ 4x+ & 5y+ & 6z = & 8 \end{cases},$$

sono le incognite, che viene naturale rappresentare come un vettore colonna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

i loro coefficienti, che viene naturale rappresentare come una matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

ed i termini noti, che viene naturale rappresentare come un vettore colonna

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

Viene allora naturale porre

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}$$

in modo da poter scrivere l'equazione data nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Siamo cosi' portati a definire il prodotto di una matrice per un vettore colonna, tali che ciascuna riga della matrice abbia lo stesso numero di componenti del vettore colonna, come il vettore colonna dei prodotti delle varie righe della matrice per il vettore colonna:

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} R_1B \\ R_2B \\ \vdots \\ R_mB \end{bmatrix}.$$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \cdot 0 & +26 \cdot 1 & +8 \cdot 2 \\ 52 \cdot 0 & +58 \cdot 1 & +12 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 & +3 \cdot 1 & +9 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 82 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

In questo modo, il generico sistema di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

si puo' scrivere nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ponendo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A_{m\times n}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X_{n\times 1}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B_{m\times 1},$$

si ha la rappresentazione sintetica

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}.$$

I dati che caratterizzano due sistemi lineari in tre incognite, aventi gli stessi coefficienti ed incognite indipendenti,

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & 3z = & 7 \\ 4x+ & 5y+ & 6z = & 8 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x'+ & 2y'+ & 3z' = & 9 \\ 4x'+ & 5y'+ & 6z' = & 10 \end{cases},$$

sono le incognite, che viene naturale rappresentare come una matrice di due colonne

$$\begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{bmatrix},$$

i loro coefficienti, che viene naturale rappresentare come una matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

i termini noti, che viene naturale rappresentare come una matrice di due colonne

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Viene allora naturale porre

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z & x'+2y'+3z' \\ 4x+5y+6z & 4x'+5y'+6z' \end{bmatrix}$$

in modo da poter scrivere l'equazione data nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Siamo cosi' portati a definire il prodotto di due matrici, tali che ciascuna riga della prima matrice abbia lo stesso numero di componenti di ciascuna colonna della secoda matrice, come la matrice dei vettori colonna prodotti della prima matrice per le varie colonne della seconda matrice:

$$AB = A[\ B_1\ B_2\ \dots\ B_p] = [\ AB_1\ AB_2\ \dots\ AB_p].$$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 44 & 18 & -8 \end{bmatrix}.$$

In questo modo, p sistemi lineari, aventi gli stessi coefficienti ed incognite indipendenti,

$$AX^{(1)} = B^{(1)}, \quad AX^{(2)} = B^{(2)}, \quad \ldots, \quad AX^{(p)} = B^{(p)},$$

si possono rappresentare simultaneamente nella forma

$$A[\ X^{(1)}\ X^{(2)}\ \ldots\ X^{(p)}] = [\ B^{(1)}\ B^{(2)}\ \ldots\ B^{(p)}].$$

Ponendo

$$A = A_{m\times n}, \quad [\ X^{(1)}\ X^{(2)}\ \ldots\ X^{(p)}] = X_{n\times p}, \quad [\ B^{(1)}\ B^{(2)}\ \ldots\ B^{(p)}] = B_{m\times p},$$

si ha la rappresentazione sintetica

$$A_{m\times n} X_{n\times p} = B_{m\times p}.$$

Si noti che, in base alle definizioni poste, si ha

$$A_{m\times n} B_{n\times p} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_p \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B_1 & \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B_2 & \ldots & \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B_p \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \ldots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \ldots & A_2B_p \\ \vdots & & & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \ldots & A_mB_p \end{bmatrix}.$$

- *Si ha dunque che il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ puo' essere ridefinito come la tabella dei prodotti delle varie righe $A_1, A_2, \ldots, A_m$ di A per le varie colonne $B_1, B_2, \ldots, B_p$ di B. Inoltre, indicati gli elementi delle matrici fattori con*

  $$A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}, \quad B = [b_{jk}]_{j=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,p},$$

  si ha che l'elemento di posto (i, j) nella matrice prodotto AB e' dato da

  $$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1,\ldots,n} a_{ij} b_{jk}.$$

Le matrici

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

in generale

$$I_n = [\delta_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}, \qquad dove \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases},$$

svolgono il ruolo del numero 1, nel senso che, per ogni matrice $A_{m\times n}$ di tipo $m \times n$ si ha

$$I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n.$$

La matrice I_n viene detta matrice unita' di ordine n.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifica generale Nella matrice

$$AI_n$$

prodotto della matrice $A = [a_{ij}]$ per la matrice $I_n = [\delta_{jk}]$ l'elemento di posto (i, k) e'

$$a_{i1}\delta_{1k} + a_{i2}\delta_{2k} + \ldots + a_{i,k-1}\delta_{k-1,k} + a_{i,k}\delta_{k,k} + a_{i,k+1}\delta_{k+1,k} + \ldots + a_{in}\delta_{nk} =$$

$$a_{i1}0 + a_{i2}0 + \ldots + a_{i,k-1}0 + a_{i,k}1 + a_{i,k+1}0 + \ldots + a_{in}0 = a_{ik},$$

che e' l'elemento di posto (i, k) nella matrice A. Cio' vale per ogni coppia (i, k) di indici $i = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$; dunque si ha

$$AI_n = A.$$

In modo analogo si verifica l'altra identita'.