Matematica II, 22.04.04

Il prodotto di matrici e' un'operazione parziale che prende in entrata una matrice A ed una matrice B, tali che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B, e restituisce in uscita una matrice AB, che ha lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B. In altri termini, se A e' una matrice di tipo $m \times n$ e B e' una matrice di tipo $n \times p$, allora la matrice $P = AB$ loro prodotto ha tipo $m \times p$:

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = P_{m\times p}.$$

La successione delle matrici unita'

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

svolge il ruolo analogo al numero 1, nel senso che

$$A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}, \quad \forall A_{m\times n}; \qquad I_n B_{n\times p} = B_{n\times p}, \quad \forall B_{n\times p}.$$

Si verifica che ciascuna matrice I_n e' univocamente determinata da queste proprieta'.

Viene naturale chiedersi se il prodotto di matrici sia commutativo. Si osservi innanzitutto che entrambi i prodotti AB e BA esistono se e solo se i tipi di A e B sono rispettivamante della forma $m \times n$ e $n \times m$; in tal caso AB ha tipo $m \times m$ e BA ha tipo $n \times n$, dunque AB potra' essere uguale a BA solo nel caso in cui $m = n$. Siamo dunque condotti a chiederci se il prodotto di matrici quadrate dello stesso ordine e' commutativo. La risposta e' negativa, come mostrato dal seguente controesempio

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Il risultato e' lo stesso solo nel caso in cui $c = 0$ e $a = d$.

Il problema non e' grave, anche se bisognera' stare attenti, nel calcolo di espressioni matriciali, a non effettuare acriticamente passaggi indotti dall'abitudine al calcolo con enti commutativi.

Date tre matrici A, B, C, tali che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B e il numero delle colonne di B sia uguale al numero delle righe di C, si avranno due modi di svolgere i prodotti:

$$(AB)C \quad e \quad A(BC).$$

Viene allora da chiedersi se il risultato sara' lo stesso. In altri termini, ci stiamo chiedendo se il prodotto di matrici e' associativo.

Effettuiamo una verifica in un caso abbastanza piccolo ma significativo. Da una parte si ha

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 + 3a_2 & 2a_1 + 4a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$a_1b_1 + 3a_2b_1 + 2a_1b_2 + 4a_2b_2.$$

Dall'altra

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 + 2b_2 \\ 3b_2 + 4b_2 \end{bmatrix} =$$

$$a_1b_1 + 2a_1b_2 + 3a_2b_1 + 4a_2b_2.$$

Si e' ottenuto lo stesso risultato; si osservi che si tratta di un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili a_ib_j, dove il coefficiente di a_ib_j e' l'elemento di posto (i, j) nella matrice centrale.

Si verifica che il prodotto di matrici e' associativo. Dunque potremmo scrivere monomi in simboli matriciali senza indicare con parentesi l'ordine di svolgimento dei prodotti. Si puo' dare una formula esplicita per il prodotto di tre matrici: posto

$$A = [a_{if}]_{i=1,\dots,m;\ f=1,\dots,n}, \quad B = [b_{fg}]_{f=1,\dots,n;\ g=1,\dots,p}, \quad C = [c_{gj}]_{g=1,\dots,p;\ j=1,\dots,q},$$

$$ABC = R = [r_{ij}]_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,q},$$

si ha

$$r_{ij} = \sum_{f=1,\dots,n;\ g=1,\dots,p} a_{if}b_{fg}c_{gj}, \qquad \forall i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,q.$$

Iniziamo ora ad avvicinarci alla nozione di divisione di matrici.

Definizione *Data una matrice A di tipo $m \times n$, si dice che una matrice B di tipo $n \times m$ e'*

- *un'inversa destra di A se $AB = I_m$;*
- *un'inversa sinistra di A se $BA = I_n$;*
- *un'inversa di A se $BA = I_n$ e $AB = I_m$.*

Esempio Chiediamoci se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

possiede un'inversa destra, cioe' se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tale che $AB = I_2$, cioe'

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha un sistema di quattro equazioni lineari nelle quattro incognite a, b, c, d :

$$\begin{cases} a+ & 2c = & 1 \\ b+ & 2d = & 0 \\ 2a+ & 4c = & 0 \\ 2b+ & 4d = & 1 \end{cases}$$

che e' palesemente inconsistente. Dunque la matrice A non possiede alcuna inversa destra; si verifica che non possiede nemmeno inverse sinistre.

Esempio Si verifica che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

possiede una ed una sola inversa:

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esempio Si verifica che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

possiede infinite inverse destre, ad esempio le matrici

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \\ e & f \end{bmatrix},$$

dove e, f sono parametri. Ci chiediamo se la matrice A possiede qualche inversa sinistra, cioe' se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si puo' osservare che la matrice al primo membro sara' della forma

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

... dunque A non possiede alcuna inversa sinistra.

Proposizione *Se una matrice A di tipo $m \times n$ possiede un'nversa destra B e un'inversa sinistra C, allora $B = C$, dunque A possiede un'unica inversa.*

La verifica di questa proposizione si basa solo sulle definizioni e sulla proprieta' associativa:

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_m = C.$$

Per stabilire i principali risultati sulla divisione di matrici conviene introdurre un nuova descrizione del prodotto di matrici. Partiamo da un conto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 3\beta + 5\gamma \\ 2\alpha + 4\beta + 6\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \gamma$$

che puo' essere interpretato dicendo che il prodotto della matrice di tipo 2×3 data per il vettore colonna 3×1 dato puo' essere visto come la combinazione lineare delle 3 colonne dalla matrice 2×3 con i pesi dati dalle 3 componenti del vettore colonna 3×1. Piu' in generale si hanno i seguenti fatti

- *il prodotto di una matrice matrice di tipo $m \times p$ per un vettore colonna $p \times 1$ puo' essere visto come la combinazione lineare delle p colonne dalla matrice $m \times p$ con i pesi dati dalle p componenti del vettore colonna $p \times 1$:*

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = A_1\beta_1 + A_2\beta_2 + \dots + A_p\beta_p.$$

- *nella matrice prodotto di una matrice matrice di tipo $m \times p$ per una matrice di tipo $p \times q$*

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pq} \end{bmatrix},$$

  la prima colonna puo' essere vista come la combinazione lineare

$$A_1\beta_{11} + A_2\beta_{21} + \dots + A_p\beta_{p1}$$

  delle p colonne dalla matrice $m \times p$ con i pesi dati dalle p componenti della prima colonna della matrice $p \times q$; la seconda colonna puo' essere vista come la combinazione lineare

$$A_1\beta_{12} + A_2\beta_{22} + \dots + A_p\beta_{p2}$$

  delle p colonne dalla matrice $m \times p$ con i pesi dati dalle p componenti della seconda colonna della matrice $p \times q$; ...

Esempio Il punto di vista appena esposto rende immediato riconoscere che

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix}$$

... l'esito e' lo scambio delle prime due colonne della prima matrice.

Consideriamo un'equazione matriciale

$$A_{m \times n} X_{n \times p} = B_{m \times p}$$

nella matrice incognita X. Mettendo in evidenza le colonne delle matrici A e B, possiamo rappresentare l'equazione nella forma

$$\left[\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_p \end{array}\right].$$

Le considerazioni precedenti ci portano a realizzare che

- *l'equazione ha soluzione se e solo se ciascuna colonna della matrice B e' combinazione lineare delle colonne $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ della matrice A; di piu', nelle colonne della matrice X compaiono i pesi incogniti di tali combinazioni lineari.*

Esempio Data la matrice

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array}\right]$$

consideriamo l'equazione $AX = I_2$, cioe'

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pensando alla rappresentazione geometrica di queste colonne nel piano, si puo' osservare che la prima colonna della matrice I_2 non e' combinazione lineare delle due colonne della matrice A. Dunque l'equazione matriciale data non ha soluzione.

Esempio Data la matrice

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{array}\right]$$

consideriamo l'equazione $AX = I_2$, cioe'

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ci sono soluzioni se e solo se entrambe le colonne della matrice I_2 sono combinazione lineare delle colonne di A. Siamo cosi' condotti a considerare la matrice

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan a questa matrice, non si alterano le relazioni fra le colonne, e si ottiene la matrice a scala ridotta

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right],$$

la cui terza colonna e' combinazione lineare delle prime due, con pesi -5 e 3, e la cui quarta colonna e' combinazione lineare delle prime due, con pesi 2 e -1. Dunque l'equazione data ha l'unica soluzione

$$X = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$