Matematica II, 24.02.04

Iniziamo considerando l'insieme

$$R^2 = \{(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in R\},$$

costituito dalle coppie ordinate di numeri reali. Ciascuna coppia puo' essere pensata come un'unica entita', e venire denotata con una lettera minuscola sottolineata come $\underline{a}, \underline{b}, \ldots, \underline{x}, \ldots$ La coppia nulla $(0,0)$ viene denotata col simbolo $\underline{0}$; per ogni coppia $\underline{x} = (x_1, x_2)$, la coppia $(-x_1, -x_2)$ si denota $-\underline{x}$ e si dice coppia opposta della $\underline{x}$.
La somma di due coppie ed il prodotto di un numero reale per una coppia vengono definite componente per componente:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2);$$

$$\alpha(x_1, x_2) := (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Si ha dunque una struttura in cui compaiono entita' di due tipi, coppie di numeri reali e singoli numeri reali, con due operazioni, somma di coppie e prodotto di un numero per una coppia, che producono coppie. Queste operazioni hanno le usuali proprieta' del calcolo letterale, che per il momento non menzioniamo.

Si puo' stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme R^2 delle coppie ordinate di numeri reali e l'insieme dei punti del piano ordinario fissando un sistema di riferimento cartesiano, mettiamo ortogonale monometrico. Precisamente, fissata una coppia ordinata di rette orientate incidenti in un punto O e mutuamente ortogonali, dette asse x_1 e asse x_2, ed un segmento unita' di misura, per ogni data coppia (a_1, a_2) in R^2 si considerano il punto A_1 di ascissa a_1 sull'asse x_1, il punto A_2 di ascissa a_2 sull'asse x_2, poi il reattangolo individuato dagli spigoli OA_1 e OA_2, e si prende il vertice A opposto ad O. Dunque la coppia ordinata (a_1, a_2) in R^2 puo' essere pensata come il punto A del piano ordinario. Risulta pero' spesso piu' adeguato pensarla come il segmento orientato OA.

I segmenti orientati con primo estremo O, detti solitamente vettori applicati in O, possono essere sommati fra loro e moltiplicati per numeri reali: la somma dei vettori OP e OQ viene definito come il vettore OR dato dalla diagonale che congiunge O col quarto vertice del parallelogramma individuato dai lati OP e OQ; il prodotto del numero reale α per il vettore OP viene definito come il vettore OS che rispetto a OP ha la stessa direzione, verso uguale od opposto secondoche α sia positivo o negativo, e lunghezza moltiplicata per $|\alpha|$.

Si verifica che queste operazioni sui vettori applicati vengono a rappresentare le operazioni definite sulle coppie ordinate di numeri reali. Precisamente, date due coppie qualunque $\underline{a} = (a_1, a_2)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2)$ in R^2 ed indicati con OA e OB i vettori applicati corrispondenti, si verifica che alla coppia $\underline{a} + \underline{b}$ ottenuta sommando componente per componente $\underline{a}$ e $\underline{b}$ corrisponde il vettore applicato $OA + OB$ ottenuto sommando con la regola del parallelogramma OA e OB. Analogamente per l'operazione di moltiplicazione per un numero reale.

D'ora innanzi useremo i termini "coppia ordinata di numeri reali" e "vettore" come sinonimi; talvolta useremi il termine "scalare" per indicare un numero reale.

Ogni espressione ottenuta a partire da certi vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ con le operazioni di somma di vettori e prodotto di in vettore per uno scalare si puo' ricondurre alla forma

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_p \underline{v}_p.$$

Questa espressione si dice *combinazione lineare dei vettori* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ *secondo gli scalari, o pesi,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Dato un vettore $\underline{w}$ in R^2, ci si puo' porre il problema di decidere se il vettore $\underline{w}$ si puo' scrivere come combinazione lineare

$$\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_p \underline{v}_p$$

dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$, e in caso affermativo in quanti modi.

Esempio Ogni vettore $\underline{x}$ di R^2 si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{e}_1 = (1, 0)$ ed $\underline{e}_2 = (0, 1)$:

$$\underline{x} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2,$$

e questa scrittura e' unica, in quanto i pesi sono le componenti stesse del vettore. Si dice che i vettori $\underline{e}_1$ ed $\underline{e}_2$ costituiscono la base canonica di R^2.

Problema Il vettore $\underline{w} = (1, 3)$ si puo' scrivere come combinazione lineare

$$\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2$$

dei vettori $\underline{v}_1 = (1, 3)$ e $\underline{v}_2 = (4, 2)$? in quanti modi?

Ci stiamo chiedendo se esistono due numeri reali α_1 e α_2 tali che

$$\alpha_1(1,3) + \alpha_2(4,2) = (4,7)$$

cioe' tali che

$$(\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = (4,7).$$

Ora, quest'unica uguaglianza fra vettori di R^2 equivale a due uguaglianze fra numeri reali, cioe' al sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 & +4\alpha_2 & = & 4 \\ 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & = & 7 \end{cases}$$

Questo sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite ha una ed una sola soluzione

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1/2.$$

Dunque il vettore $\underline{w}$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, precisamente come

$$\underline{w} = 2\underline{v}_1 + \frac{1}{2}\underline{v}_2.$$

Si puo' osservare che, in realta', ogni vettore $\underline{z} = OZ$ di R^2 si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, per il solo fatto che questi due vettori non sono allineati. Infatti, la retta passante per Z e parallela alla retta individuata da $\underline{v}_2$ incontrera' la retta individuata da $\underline{v}_1$ in uno ed un solo punto Z_1, cosi' come la retta passante per Z e parallela alla retta individuata da $\underline{v}_1$ incontrera' la retta individuata da $\underline{v}_2$ in uno ed un solo punto Z_2. Applicando la regola del parallelogramma al contrario, si avra' dunque

$$OZ = OZ_1 + OZ_2.$$

D'altro canto, il vettore OZ_1 si potra' scrivere come un multiplo $\xi_1\underline{v}_1$ del vettore $\underline{v}_1$, cosi' come il vettore OZ_2 si potra' scrivere come un multiplo $\xi_2\underline{v}_2$ del vettore $\underline{v}_2$, e dunque

$$\underline{z} = \xi_1\underline{v}_1 + \xi_2\underline{v}_2.$$

Questa scrittura e' unica. Diremo che i vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ costituiscono una base di R^2 e che ξ_1 e ξ_2 sono le coordinate del vettore $\underline{z}$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$.

Intermezzo Consideriamo l'equazione

$$2x + 3y = 1$$

nelle incognite x e y. Questa equazione descrive implicitamente un sottinsieme di R^2, rappresentato nel piano da una retta; risolvere questa equazione significa descrivere esplicitamente questo sottinsieme. Cio' si puo' fare esplicitando una variabile, ad esempio la y, in funzione dell'altra

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

e uguagliando la variabile x ad un parametro libero t :

$$\begin{cases} x & = & t & \\ y & = & -\frac{2}{3}t & +\frac{1}{3} \end{cases}$$

Si noti che la soluzione generale si puo' esprimere come

$$(t, -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}) = (t, -\frac{2}{3}t) + (0, \frac{1}{3}) = t(1, -\frac{2}{3}) + (0, \frac{1}{3})$$

Siamo cosi' portati a descrivere l'insieme delle soluzioni come la retta che passa per il punto $(0, \frac{1}{3})$ ed ha la direzione del vettore $(1, -\frac{2}{3})$.

Problema Il vettore $\underline{w} = (7, 8)$ si puo' scrivere come combinazione lineare

$$\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3$$

dei vettori $\underline{v}_1 = (1, 2)$, $\underline{v}_2 = (3, 4)$, e $\underline{v}_3 = (5, 6)$? in quanti modi?

Ci stiamo chiedendo se esistono tre numeri reali α_1, α_2 e α_3 tali che

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(3, 4) + \alpha_3(5, 6) = (7, 8)$$

cioe' tali che

$$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3) = (7, 8).$$

Ora, quest'unica uguaglianza fra vettori di R^2 equivale a due uguaglianze fra numeri reali, cioe' al sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 & +3\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 7 \\ 2\alpha_1 & +4\alpha_2 & +6\alpha_3 & = & 8 \end{cases}$$

Questo sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 & +3\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 7 \\ & -2\alpha_2 & -4\alpha_3 & = & -6 \end{cases},$$

che si puo' risolvere esplicitando α_1 e α_2 in funzione di α_3 :

$$\begin{cases} \alpha_1 & +3\alpha_2 & = & 7 & -5\alpha_3 \\ & \alpha_2 & = & 3 & -2\alpha_3 \end{cases},$$

che porge

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & -2 & +\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & 3 & -2\alpha_3 \end{cases}.$$

Uguagliando la variabile α_3 ad un parametro libero t, la soluzione generale del sistema si puo' descrivere come

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & -2 & +t \\ \alpha_2 & = & 3 & -2t \\ \alpha_3 & = & & t \end{cases},$$

Dunque il vettore $\underline{w}$ si puo' scrivere in infiniti modi come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, e $\underline{v}_3$, precisamente come

$$\underline{w} = (-2+t)\underline{v}_1 + (3-2t)\underline{v}_2 + t\underline{v}_3,$$

dove t e' un parametro reale.